

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

21. Band, Heft 5

22. November 1939

S. 193—240

## Geschichtliches.

● Archibald, Raymond Clare: *Outline of the history of mathematics*. 4. edit., revised a. enlarged. Oberlin, Ohio, U. S. A.: Math. Assoc. of America, Inc. 1939. 66 pag. \$ —.50.

Die 4. Auflage ist abermals erweitert, besonders im Hinblick auf älteste Mathematik und im Literaturverzeichnis; im einzelnen sind so viele Verbesserungen und Glättungen vorgenommen, daß der Verf. die früheren Auflagen ausgeschieden sehen will. Das Heft gibt eine ansprechende Skizze der Entwicklung bis um 1800, die in ihrer bündigen Kürze unübertroffen ist. Zugleich gibt es einen umfassenden Führer zum Schrifttum über Geschichte der Mathematik, wobei freilich nach der Bestimmung des Heftes für amerikanische Leser Werke in englischer Sprache in den Vordergrund gerückt sind. Z. B. sollte ein Hinweis auf die Leibnizforschungen von Dietrich Mahne nicht fehlen. — Es scheint ideengeschichtlich nicht ganz gerecht, Leistungen von Heron und Kopernikus mit der Bemerkung einzuschränken, solche Dinge seien schon etwa 2000 Jahre vorher bei den Ägyptern, Babyloniern bzw. von Aristarch gefunden; es ist kein Zweifel, daß sie nach völligem Erlöschen der Überlieferung aufs neue selbständig gefunden sind. Kopernikus kann nicht als „polish astronomer“ bezeichnet werden. Wir vermissen den Namen Johann Bernoulli. Für die nichteuklidische Geometrie ist Janos (Johann) v. Bolyai zu nennen; Verf. erwähnt nur Farkas (Wolfgang) v. Bolyai. *Ulrich* (Gießen).

Neugebauer, O.: *Ancient Egyptian astronomy*. Nature, Lond. 143, 765—766 (1939).

Erwiderung auf die Note von H. Chatley [Nature, Lond. 143, 336 (1939)], enthaltend eine prägnante, sehr treffende Charakterisierung der Stellung der Astronomie der Ägypter zu der der Babylonier und Griechen unter Hinweis auf die völlig analogen Verhältnisse in der Mathematik. *Bessel-Hagen* (Bonn).

● Dijksterhuis, E. J.: *Archimedes*. Tl. 1. (Histor. Bibl. f. d. exakt. Wiss. Tl. 4.) Groningen u. Batavia: P. Noordhoff N. V. 1938. 213 S. u. 91 Fig. geb. Fl. 4.50 [Holländisch].

Der durch seine Euklidausgabe (Groningen 1929, 1931) bestens bekannte Verf. legt jetzt den ersten Teil einer neuen Archimedesbearbeitung vor. In einem 1. Kapitel (S. 3—28) werden alle Quellen, die zur Ausgestaltung des Archimedischen Lebensbildes beitragen können, herangezogen, wobei auch die verschiedenen Legenden (Archimedes im Bad, der Punkt im Weltall usw.) auf ihren sachlichen Hintergrund kritisch untersucht werden. Kapitel 2 (S. 28—44) gibt einen Überblick über die Schicksale der in Frage kommenden Hs. und eine Aufzählung der verschiedenen Ausgaben und Übersetzungen. Das 3., besonders hervorzuhebende Kapitel (S. 44—133) stellt den Kern, die „Elemente“ der Archimedischen Lehre (z. B. über die Kegelschnitte, Zylinder, arithmetische Hilfssätze, unendliche Prozesse usw.) in einer sinnreichen, dezimal bezifferten Einteilung zusammen, die leicht Rückverweise gestattet. Die beiden letzten Kapitel (S. 134—213) enthalten eine kommentierte Übersetzung der beiden Bücher über Kugel und Zylinder. Die Darstellungsart ist durch Verwendung einer speziellen Zeichenschrift äußerst glücklich gewählt. Man wird weder durch die umständliche griechische Formulierung, wie sie die wörtliche Übersetzung (vgl. Ver Eecke) mit sich bringt, ermüdet den Überblick verlieren; andererseits ist auch die bei rein moderner Wiedergabe (vgl. Heiberg) bestehende Gefahr, alles modern durchzudenken, vermieden und der Leser wird gezwungen, sich in die griechischen Gedankengänge einzufühlen. *Vogel* (München).

**Sibirani, F.: Il trattato delle spirali di Archimede.** Boll. Un. Mat. Ital., II. s. 1, 160—172 e 259—274 (1939).

Nach kurzen historischen Vorbemerkungen gibt Verf. eine gute italienische Übersetzung der 27 Sätze der Spiralenabhandlung. Die Beweise werden durch Anwendung der modernen Bezeichnungsweise vereinfacht und übersichtlich ausgeführt. *Hofmann.*

**Bompiani, Enrico: Alcune costruzioni di coniche.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 372 bis 373 (1939).

Verf. erinnert an eine Konstruktion von Guidubaldo del Monte (1545—1607), nach der man bei einer Ellipse, von der Lage und Länge der großen Achse sowie ein weiterer Punkt bekannt sind, die kleine Achse finden kann, und überträgt sie auf die anderen Kegelschnitte. *Harald Geppert* (Gießen).

**Bortolotti, Ettore: Il primato dell'Italia nel campo della matematica.** (27. *riun., Bologna, 4.—11. IX. 1938.*) Atti Soc. ital. Progr. Sci. 3, 598—617 (1939).

Verf. gibt einen sehr temperamentvoll geschriebenen, gelegentlich allzu italienisch gesehenen Überblick über Wirksamkeit und Bedeutung der großen italienischen Mathematiker, der sich vor allem auf Leonardo von Pisa, Cardano, Bombelli, Cataldi, Cavalieri und Torricelli bezieht. Er faßt darin die Ergebnisse seiner zahlreichen wertvollen Veröffentlichungen der letzten zwei Jahrzehnte zusammen, die in einer leidenschaftlichen, in vielen Einzelheiten voll berechtigten, aber im ganzen doch wohl etwas zu weitgehenden Kritik an dem wissenschaftsgeschichtlichen Lebenswerk Gino Lorias münden. *Hofmann* (Nördlingen).

**Bortolotti, Ettore: I primi algoritmi infiniti nelle opere dei matematici italiani del secolo XVII.** Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 351—371 (1939).

Die Arbeit berichtet über das erste Auftreten unendlicher Algorithmen, nämlich Reihen und Kettenbrüche, sowie die Grundlegung des Grenzwertbegriffes in der italienischen Mathematik. 1613 gibt Cataldi Reihenentwicklungen zur Berechnung irrationaler Quadratwurzeln mit genauer Fehlerabschätzung an und gelangt durch sie zu den unendlichen Kettenbrüchen; er entwickelt das Gesetz der Näherungsbrüche und zeigt ihre Überlegenheit gegenüber den Reihendarstellungen. 1641 definiert Torricelli Zahlen als Summen unendlicher Reihen und summiert die unendliche geometrische Reihe. 1650 hat Pietro Mengoli die genaue Definition des Grenzbegriffs einer Folge und der Summe einer unendlichen Reihe (durch die neue Zahlengrößen erklärt werden können), er beweist die Divergenz der harmonischen Reihe und summiert neue Typen positivgliedriger Reihen; 1657 gibt er eine zusammenfassende Darstellung des Grenzbegriffes. Taquet, dem man bisher die erste Summation unendlicher Reihen zuschrieb, hat, wie Verf. nachweist, Torricelli plagiiert. Torricellis und Mengolis Werke waren auch Gregorio da San Vincenzo ebenso wie Wallis bekannt, so daß die Definition und der folgerichtige Ausbau des Grenzwertbegriffs das Verdienst der italienischen Geometer ist. *Harald Geppert* (Gießen).

● **Bieberbach, Ludwig: Galilei und die Inquisition.** München: Arbeitsgemeinschaft f. Zeitgeschichte. Verlags- und Vertriebsges. m. b. H. 1938. 143 S. geb. RM. 3.80.

Nach einer Schilderung der Zeit und ihrer naturwissenschaftlichen Fragen übernimmt Verf. eine zusammenfassende Darstellung des Zusammenstoßes zwischen Galilei und den kirchlichen Instanzen; er belegt seine Darstellung mit umfangreichen Auszügen aus dem Aktenmaterial sowie aus Briefen. Es handelt sich um eine Niederschrift nach Berliner Vorlesungen, die sich nicht bloß an Fachgenossen richtet. *Ullrich.*

● **Kepler, Johannes: Gesammelte Werke. Bd. 1. Mysterium cosmographicum. De Stella nova.** Hrsg. v. Max Caspar. Unter d. Leitung v. Walther von Dyk † u. Max Caspar. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandl. 1938. XV, 493 S. RM. 11.25.

● **Kepler, Johannes: Gesammelte Werke. Bd. 2. Astronomiae pars optica.** Hrsg. v. Franz Hammer. Unter d. Leitung v. Walther von Dyk † u. Max Caspar. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandl. 1939. 467 S. RM. 11.25.

Die neue Gesamtausgabe der Werke Keplers, deren erste Bände hier vorliegen,

wurde geplant und in vieljähriger Arbeit vorbereitet von W. v. Dyck. Nach seinem Tod nahmen sich die Deutsche Forschungsgemeinschaft und die Bayerische Akademie der Wissenschaften der geplanten Ausgabe an und übertrugen die Leitung dem verdienten Mitarbeiter W. v. Dycks, M. Caspar. Für die von Kepler selbst herausgegebenen Werke ist als zweckmäßigste Anordnung die nach den drei Hauptabschnitten seines Wirkens — der Zeit in Graz und Prag, in Linz, in Ulm und Sagan — gewählt. Daran sollen sich die Kalender, die theologischen und sonstigen Schriften, der Briefwechsel und Nachlaß schließen. — Jeder der jetzt vorliegenden, vom Verlag würdig ausgestatteten Bände gliedert sich in den Textteil und den „Nachbericht“. Dieser gibt für jedes Werk die Entstehungsgeschichte, eine Analyse des Inhalts, einschlägige Manuskripte (d. h. im wesentlichen den Hinweis auf die zugehörigen Stellen aus Keplers Briefwechsel) und Anmerkungen. Diese Anmerkungen beschränken sich nicht auf philologische Bemerkungen, sondern geben auch wesentliche Hilfen zum Verständnis des sächlich wie sprachlich oft recht schwierigen Textes. Die schwierige Aufgabe, in möglichster Kürze den Lesern den Zugang zu Kepler zu erleichtern, haben die Herausgeber der beiden Bände durch den Nachbericht vorbildlich gelöst. Wünschenswert wäre vielleicht, einem späteren Bande ein Verzeichnis der nicht unmittelbar verständlichen Fachausdrücke beizugeben. — Der erste Band beginnt mit dem *Mysterium Cosmographicum* in der Fassung von 1596 (die von 1621 erscheint in einem späteren Band), dem wie im Original die *Narratio Prima* des G. J. Rheticus mit dem Appendix Mich. Mästlins beigegeben ist. Da das *Mysterium* wohl das bekannteste Werk Keplers ist, erübrigt sich eine Angabe des Inhalts. Der zweite Teil des ersten Bandes bringt die Abhandlung *De Stella Nova in pede Serpentarii* mit den Einschiebseln *De Stella Cygni* und *De Jesu Christi vero Anno Natalitio* sowie den Bericht vom Neuen Stern. Hier interessiert vor allem die Stellung zur Astrologie, auch in ihrer Gebundenheit zeugt sie vom kritischen Denken Keplers. — Der zweite Band enthält die *Astronomia Pars Optica* (*Ad Vitellionem Paralipomena*), diese führt die durch Witelo vermittelte antike Tradition der geometrischen Optik fort. Die Auffindung des Brechungsgesetzes gelingt Kepler allerdings nicht, dafür gibt er als erster eine richtige Erklärung des Auges als optisches Instrument. Im astronomischen Teil nimmt er die Untersuchung des Einflusses optischer Erscheinungen auf astronomische Beobachtungen in Angriff, sei es, daß sie wie die Refraktion von der Erdatmosphäre herrühren, sei es, daß sie wie bei der Lochkamera durch das Beobachtungsinstrument bedingt sind.

Krafft (Marburg a. d. L.).

● Speiser, Andreas: *Die Basler Mathematiker*. 117. Neujahrsblatt. Hrsg. v. d. Ges. z. Beförderung d. Guten u. Gemeinnützigen. Basel: Helbing & Lichtenhahn 1939. RM. 1.50.

Nach einem kurzen Einblick in die Frühzeit der Basler hohen Schule schildert Verf. Gestalt und Leben, Gedanken und Werk der Mitglieder der Basler Mathematikerdynastie Bernoulli und dann Leonhard Euler. Er zeigt ihre Stellung in ihrer Zeit. Er legt Gewicht darauf, daß neben Johann I. Bernoulli sowohl dessen älterer Bruder Jakob ebenbürtig erscheint, als auch darauf, Johanns Sohn Daniel volle Anerkennung zu zollen. Mit den Gestalten dieser Forscher verbindet der Verf. Ausblicke auf die Ideengehalte, die ihnen die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Infinitesimalrechnung, die Hydrodynamik, die Zahlentheorie danken. Die Schrift wird ebenso dem Mathematiker wie dem geistesgeschichtlich interessierten Laien viel zu sagen haben; Speisers Art, darzustellen, führt (ohne daß davon explizit die Rede wäre) eindrucksvoll auf die Parallele der Wiederkehr ausgesprochener schöpferischer Veranlagungen in den Familien Bernoulli und Bach.

Ullrich (Gießen).

Boegehold, H.: *Zur Vorgeschichte der Monochromate*. Z. Instrumentenkde 59, 200—207 u. 234—241 (1939).

Die Arbeit enthält viele (vom Verf. übersetzte) Auszüge aus den Werken von Euler sowie von Klingenstjerna, in denen sich diese mit der Möglichkeit der Behebung der sphä-

rischen Aberration, des Öffnungsfehlers, beschäftigt haben. Der Verf. schließt seine historischen Untersuchungen mit den Worten: „Es scheint, als hätte Euler zuerst eine Lösung der Aufgabe gefunden, den Öffnungsfehler durch Spaltung in Linsen mit gleichem Vorzeichen der Brennweite zu heben, Klingenstjerna hat zuerst veröffentlicht. Der Leser wird erkannt haben, daß jeder von beiden Einzelheiten bemerkt hat, die beim andern fehlen.“ *Picht.*

**Hirayama, Akira:** *List of Jinkôki and Kaisanki, two popular works of the old Japanese mathematics.* Tôhoku Math. J. 45, 377—404 (1939).

Jinkôki und Kaisanki sind zwei berühmte populäre Lehrbücher der elementaren Mathematik im 17. bis 19. Jahrhundert vor der Restauration (1868) in Japan. Besonders das erste war in allen Schichten des Volkes weit verbreitet und wurde viel benützt, so daß es von vielen Autoren und Verlegern verkürzt, vermehrt, verbessert oder manchmal sogar verschlimmert und auch mit Figuren versehen wurde. Auf Grund vieljähriger Nachforschungen gibt der Verf. hier eine ziemlich vollständige Bibliographie zu den obengenannten Büchern; seine Beschreibung erstreckt sich auf fast 300 verschiedene Auflagen von Jinkôki und 60 Auflagen von Kaisanki. *Fujiwara.*

**Katô, Heizaemon:** *On the expansion of determinants in the Wasan.* Tôhoku Math. J. 45, 338—353 (1939) [Japanisch].

In der Geschichte der alten japanischen Mathematik ist die Entwicklungsregel der Determinanten von der Ordnung 2—5, welche von Takakazu Seki 1683 angegeben wurde, eine der bemerkenswerten Tatsachen. In dem Werke von Seki sind aber zwei unrichtige Punkte enthalten, deren einer von Yosisuke Matunaga 1715, der andere von Genken Sugano und Sinyû Isiguro 1798 unabhängig bemerkt und korrigiert wurde. Der Verf. macht auf einen kleinen Fehler aufmerksam, der sich in dem betreffenden Werke von Genken Sugano in der Entwicklungsregel der Determinanten von höherer als 6. Ordnung findet. *Fujiwara (Sendai).*

**Sansone, Giovanni:** *Commemorazione di Ulisse Dini.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 373—383 (1939).

**Zassenhaus, Hans:** *Zum Gedenken an Hans Fitting.* Jber. Deutsch. Math.-Ver. einig. 49, Abt. 1, 93—96 (1939).

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

**Kneser, Hellmuth:** *Laplace, Gauss und der Fundamentalsatz der Algebra.* Deutsche Math. 4, 318—322 (1939).

Laplace hat 1795 einen Beweisansatz für den Fundamentalsatz der Algebra entwickelt, der induktiv bezüglich des Grades fortschreitet. Der Satz sei für reelle Polynome des Grades  $2^k$  · ungerade Zahl gültig und für reelle Polynome  $F(x; a)$  des Grades  $2^{k+1}$  · ungerade Zahl zu beweisen. Sind dann  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  die hypothetischen Wurzeln, so bildet man die Polynome  $g(y, z) = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (y - \alpha_\mu - \alpha_\nu - \alpha_\mu \alpha_\nu z)$ , deren

Koeffizienten sich reell in den Koeffizienten  $a$  des Polynoms  $F(x; a)$  ausdrücken.  $g$  ist in  $y$  vom Grade  $\frac{1}{2} n(n-1) = N-1 = 2^k$  · ungerade Zahl, besitzt also nach Annahme zu jedem von  $N$  beliebigen verschiedenen Werten  $z_1 \dots z_N$  eine entsprechende Wurzel

$$y_k = \alpha_{\mu_k} + \alpha_{\nu_k} + \alpha_{\mu_k} \alpha_{\nu_k} z_k, \quad (k = 1 \dots N)$$

wobei mindestens zweimal das gleiche Zeigerpaar  $\mu_k = \mu_l = \mu^*$ ,  $\nu_k = \nu_l = \nu^*$  ( $k \neq l$ ) auftritt. Bestimmt man dann  $u, v$  aus den beiden Gleichungen  $y_k = u + v z_k$ ,  $y_l = u + v z_l$ , so sind  $\alpha_{\mu^*}$  und  $\alpha_{\nu^*}$  Wurzeln der quadratischen Gleichung  $x^2 - u x + v = 0$ . — Dieser Ansatz unterliegt der berechtigten Kritik von Gauß, daß er von der hypothetischen Wurzelexistenz ausgeht. Er läßt sich aber, wie Verf. zeigt, zu einem vollgültigen Beweis ausbauen, wenn man die  $\alpha$  als Unbestimmte handhabt und demgemäß zu algebraischen Identitäten zwischen diesen übergeht, die man durch Übergang zu symmetrischen Bildungen in solche zwischen den Unbestimmten  $a$  umsetzt. Der sich so ergebende Beweis stimmt mit dem von Dörge (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1928,

87—89) überein; er ist unabhängig davon, ob die vorgelegte Gleichung Doppelwurzeln hat oder nicht und daher weitgehend auch für den Intuitionisten brauchbar.

Harald Geppert (Gießen).

**Bohlin, K.: Über die Eulerschen Identitäten.** Ark. Mat. Astron. Fys. 26 A, Nr 12, 1—4 (1938).

Ist  $F(z)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades mit den Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , so gelten die

Eulerschen Identitäten  $\sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu^\lambda}{F'(\alpha_\nu)} = 0$  ( $\lambda = 0, 1, \dots, n-2$ ) und die weitere Identität  $\sum_{\nu=1}^n F^{(n-1)}(\alpha_\nu) = 0$ .

Harald Geppert (Gießen).

**Sispanov, Sergio: Verallgemeinerung des Satzes von Laguerre.** Bol. mat. 12, 113—117 (1939) [Spanisch].

Data un'equazione algebrica di grado  $n$ , a coefficienti reali:  $f(x) = 0$ , è noto che un limite superiore del numero  $N_\alpha$  delle sue radici reali maggiori di un dato numero positivo  $\alpha$  è dato (Laguerre) dal numero  $V$  delle variazioni che presentano gli  $n+1$  termini della prima riga del quadro di Horner relativo al polinomio  $f(x)$  e al numero  $\alpha$ ; in ogni caso la differenza  $V - N_\alpha$  è un numero pari. — L'Autore dimostra un teorema più generale, giovandosi di facili considerazioni e senza ricorrere a sviluppi in serie come si fa d'ordinario per stabilire la regola di Laguerre. Egli dimostra che tale regola sussiste inalterata se in luogo di considerare le variazioni della prima riga del quadro di Horner si considerano quelle di  $n+1$  termini del quadro stesso formanti una scala coi lati orizzontali o paralleli alla diagonale principale. Si può osservare che considerando la diagonale principale stessa si ottiene il teorema di Budan-Fourier.

M. Cipolla (Palermo).

**Nicolau, Constantin: Un théorème sur les équations algébriques.** C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1958—1960 (1939).

Hat das Polynom  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$  lauter reelle und voneinander verschiedene Nullstellen, so liegen diese Nullstellen zwischen den beiden Zahlen

$$\frac{-a_1 + \sqrt{(n-1)^2 a_1^2 - 2n(n-2)a_2}}{n} \quad \text{und} \quad \frac{-a_1 - \sqrt{(n-1)^2 a_1^2 - 2n(n-2)a_2}}{n}.$$

Verf. bemerkt nicht, daß sein Beweis auch dann gültig bleibt, wenn  $f(x)$  auch mehrfache Nullstellen hat. — Der Satz (ohne Ausschließung der mehrfachen Nullstellen) ist in der Literatur bekannt. Vgl.: Œuvres de Laguerre 1, 92—93, Nouv. Ann. de Math. (2) 19, (1880); L. Kraus, Čas. math. fys. 15, 63 (1886); A. Pleskot. S.-B. Böhm Ges. Wiss. Prag 1897, Nr 37; Nouv. Ann. de Math. (3) 18, 301 (1898); J. v. Sz. Nagy, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 27, 43 (1918). Gy. (J.) v. Sz. Nagy (Szeged).

**Bohlin, K.: Suppléments à la théorie de l'équation algébrique du cinquième degré. Formules récentes pour les racines.** Ark. Mat. Astron. Fys. 26 A, Nr 18, 1—22 (1939).

Weitere Einzelheiten zu den in vielen früheren Arbeiten des Verf. (vgl. z. B. dies. Zbl. 7, 290 und 11, 337) gegebenen Reihenentwicklungen zur Lösung der Gleichungen 5. Grades. Insbesondere werden eingangs formale Parallelen zwischen Gleichungen 3., 4. und 5. Grades herausgearbeitet.

Bessel-Hagen (Bonn).

**Boulanger, J.: Étude d'une équation du huitième degré.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 374—384 (1939).

Verf. diskutiert das in der Astronomie vorkommende Gleichungssystem

$$x_2 = A_2 + \frac{B_2}{r_2^3 - \nu}, \quad r_2^2 = (x_2 C_2 - 2d_2)x_2 + e_2^2,$$

indem er zunächst die Unbekannte  $r_2$  eliminiert, so daß eine Gleichung achten Grades in der Unbekannten  $z$ , die in einfacher Weise mit  $x_2$  zusammenhängt, übrigbleibt. Er betrachtet nun die durch diese Gleichung bestimmte Abhängigkeit zwischen  $z$  und dem Parameter  $\nu$  unter Verwendung der Theorie der impliziten Funktionen.

G. Schrutka (Wien).

**Leser, Conrad:** Invariantentheorie algebraischer Formen. Comment. math. helv. 11, 273—292 (1939).

Wendet man auf  $k$  Reihen  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  von je  $n$  Variablen eine beliebige lineare Transformation an, so erleiden die Multilinearformen in  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  ebenfalls eine lineare Transformation. Diese linearen Transformationen bilden eine Darstellung der vollen linearen Gruppe, die mit Hilfe der Youngschen Symmetriepoperatoren in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt werden kann. Zu jedem Youngschen Schema mit höchstens  $n$  Zeilen und mit  $k_t$   $t$ -zeiligen Spalten ( $t = 1, 2, \dots, n$ ) gehört eine irreduzible Darstellung  $\Gamma_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ , die auch mehrmals vorkommen kann. Als Substrat der Darstellung können „Normalformen“ in  $n$  Sorten von Veränderlichen genommen werden, wobei die  $t$ -te Sorte aus den Determinanten aus den Variablen  $x^{(1)}, \dots, x^{(t)}$  besteht; der Grad der Normalform in der  $t$ -ten Variabelnsorte ist dann  $k_t$ . Es wird nun eine einfache Formel für die Zerlegung der Produktdarstellung

$$\Gamma_{k_1, k_2, \dots, k_n} \times \Gamma_{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}$$

angegeben. Mit Hilfe dieser Formel läßt sich jedes Produkt von irreduziblen Darstellungen ausreduzieren. Damit hat man eine Übersicht über die multilinearen Kovarianten von mehreren Normalformen. Bekanntlich sind die Kovarianten  $m$ -ten Grades einer Form als multilineare simultane Kovarianten von  $m$  gleichartigen Formen zu schreiben. Als Anwendung wird eine Formel von Deruyts neu bewiesen, die es gestattet, die Anzahl und die Ordnungen der linear-unabhängigen Kovarianten gegebenen Grades einer gewöhnlichen Form  $k$ -ter Ordnung mit Hilfe von Partitionszahlen zu berechnen. van der Waerden (Leipzig).

**Oldenburger, Rufus:** Les nombres minimaux des formes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1855—1858 (1939).

Jede Form  $F$  vom Grade  $p$  von der Gestalt

$$F = \sum a_{ij\dots m} x_i x_j \dots x_m$$

mit einem symmetrischen Tensor  $a_{ij\dots m}$  kann, wie der Autor früher (dies. Zbl. 18, 242) bewiesen hat, als Summe von  $p$ -ten Potenzen von Linearformen mit Koeffizienten aus dem Grundkörper  $K$ :

$$F = \lambda_1 L_1^p + \lambda_2 L_2^p + \dots + \lambda_m L_m^p$$

geschrieben werden. Für die kleinste Zahl  $m = m(F)$  wird nun eine Reihe von Abschätzungen angegeben. — Der Tensor  $a_{ij\dots m}$  definiert auch eine Multilinearform

$$M = \sum a_{ij\dots m} x_i y_j \dots z_m,$$

die man als Summe von Produkten von Linearformen darstellen kann. Ist  $f(M)$  die kleinste Zahl der Glieder in einer solchen Darstellung, so wird die Frage diskutiert, aber nicht beantwortet, in welchen Fällen  $f(F) = f(M)$  bewiesen werden kann. van der Waerden (Leipzig).

### **Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:**

**Barbilian, D.:** Galileische Gruppen und quadratische Algebren. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 41, 7—64 (1939).

1. Eine quadratische Mannigfaltigkeit  $(\sigma, \tau)_n$  des  $R_n$  vom Singularitätsindex  $\sigma$  und Trägheitsindex  $\tau$  besitzt eine von  $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$  Parametern abhängige Gruppe  $\mathfrak{G}$  von kollinearen Automorphismen, ihre „totale Galileische Gruppe“. Die aus zwei Schichten bestehende, von  $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}$  Parametern abhängige Untergruppe  $G$ , welche erzeugt werden kann aus projektiven Spiegelungen an Punkten (= „Galileischen Symmetrien“), wird aus elementargeometrischen Gründen als „starre“ Galileische Gruppe bezeichnet. Sie liegt den folgenden Untersuchungen zugrunde. Bei kontragredienter Schreibung ist die Matrix ihrer Darstellung von der Form

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & E \end{pmatrix} \dots \begin{cases} A = \text{orthogonal (pseudoorthogonal),} \\ B = \text{beliebig, } (n+1-\sigma) \text{ Spalten, } \sigma \text{ Zeilen,} \\ E = \text{Einheitsmatrix.} \end{cases}$$

Die Arbeit erledigt in erschöpfender Weise die grundlegende Frage nach allen invarianten Galileischen Untergruppen, die nach Belegung der zugehörigen quadratischen Mannigfaltigkeit mit einer Algebra  $O$  eine adäquate Darstellung durch lineare bzw. quasilineare (sc. gebrochene) Substitutionen dieser Algebra zulassen (Algebra = System hyperkomplexer Größen). — 2. Ist  $(Z)$  ein System hyperkomplexer Größen vom Range  $n - 1$  über dem Körper der reellen (später auch komplexen) Zahlen  $(1) Z = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i$ , und schneidet man eine reelle zusammenhängende

$M_{n-1}^2$  des  $R_n$  längs eines berührenden  $R_{n-1}$  auf, so kann man die entstehende offene  $\bar{M}_{n-1}$  als Träger der Größen  $(Z)$  einrichten. Problem der Arbeit ist, alle hyperkomplexen Systeme  $(Z)$  vom Range  $n - 1$  zu ermitteln, deren quasilineare bzw. lineare Gruppe  $(2) *Z = \frac{AZ+B}{CZ+D}$

auf Grund einer topologischen Zuordnung  $\mathfrak{Z}$  der offenen Kontinuen  $(Z) \leftrightarrow \bar{M}_{n-1}$  zu einer invarianten Galileischen Untergruppe  $G$  der totalen Gruppe  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. Unter Voraussetzung einer allgemeingültigen Darstellung von  $G$  durch  $(2)$  wird zunächst gezeigt, daß der oben durch einen Tangential- $R_{n-1}$  ausgesonderte „Rand“ von  $M_{n-1}^2$  notwendig den unendlich-großen Zahlen  $(1)$  entspricht, sowie daß Intransitivitätsbereich von  $G$  nur der Singularitätsraum  $R_{\sigma-1}$  von  $M_{n-1}^2$  ist. Man kann nun abzählen, daß die einzigen zusammenhängenden  $M_{n-1}^2$  mit invarianter Galileischer Untergruppe  $G$ , die eine Darstellung  $(2)$  gestatten, nur zu den folgenden Dimensionen und Singularitätsindizes gehören können:  $[n, \sigma] = [5, 0], [5, 1], [4, 0], [n, n-3], [n, n-2]$ . Nur die durch Fettdruck hervorgehobenen Möglichkeiten liefern, wie sich später zeigt, wirkliche Lösungen. — 3. In Verallgemeinerung von 2. wird nun verlangt:

a) Die Galileische Untergruppe  $G$  sei mittels der Abbildung  $\mathfrak{Z}$  der Algebra  $O$  auf  $M_{n-1}^2$  zu der quasilinearen bzw. linearen Gruppe über der Algebra  $O$  isomorph. b) Zwei Paare von nicht-konjugierten Punkten auf  $M_{n-1}^2$  seien bezüglich  $G$  transitiv. Die Nullteiler von  $O$  werden dann auf  $M_{n-1}^2$  durch die zum Nullpunkte  $Z = 0$  konjugierten Punkte abgebildet und irgend zwei reguläre Punktetripel auf  $M_{n-1}^2$  sind gegen  $G$  transitiv. Ist  $M_{n-1}^2$  singular vom Index  $\sigma$ , so bestehen die maximalen zweiteiligen Nullteilerideale aus gewissen durch den singulären  $R_{\sigma-1}$  und den Nullpunkt gehenden erzeugenden  $R_\nu$  ( $\nu \geq \sigma$ ). Die Anzahl dieser Ideale ist 2 für  $\sigma = n - 3, \tau = 2$ , sonst 1. Das Bild des Radikals der Algebra  $O$  enthält den vom Nullpunkt und singulären  $R_{\sigma-1}$  aufgespannten  $R_\sigma$ . Die Elemente aus  $R_\sigma$  setzen ein zweiseitiges nilpotentes Ideal zusammen. — 4. Das Bild des Grundkörpers der Algebra  $O$  auf  $M_{n-1}^2$  ist erwartungsgemäß ein Kegelschnitt. Für die charakteristische Gleichung von  $O$  ergeben sich nun 2 Fälle: a) der quadratische, b) der überquadratische. Es wird zunächst der quadratische Fall ausführlich behandelt: wie schon G. Scheffers gezeigt hat, gibt es (über dem Körper der reellen Zahlen) fünf quadratische Algebren:  $I_1$  die elliptischen,  $I_2$  die hyperbolischen Quaternionen;  $II_1$  die elliptischen,  $II_2$  die hyperbolischen „Supraternionen“;  $III$  die „supradualen“ Zahlen. Folgendes sind in den letzten Fällen die Produkttafeln.  $II$ :  $e_1 e_i = e_i, e_2^2 = -e_1, e_2 e_j = -e_j, e_j e_k = 0$ .  $III$ :  $e_1 e_i = e_i, e_p e_q = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $p, q = 2, 3, \dots, n-1$ ;  $j, k = 3, 4, \dots, n-1$ ).

— 5. Eine eingehende sehr elegante Diskussion, bei der sich Gelegenheit ergibt, die bekannte Studysche quaternionelle Nablafunktion auf allgemeine quadratische Algebren zu übertragen, ergibt nun als zu obigen fünf Algebren gehörig der Reihe nach folgende quadratische Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}^2$ :  $(0, 1)_5, (0, 3)_5, (n-3, 1)_n, (n-3, 2)_n, (n-2, 1)_n$ . — 6. Die Einzigkeit dieser fünf Lösungen kann nun bewiesen werden, wenn man den überquadratischen Fall b) noch durch die Forderung beseitigt, daß die „Spur“ (= Wirkung)  $[G]$  der Gruppe  $G$  auf dem maximalen Unprimitätssystem von  $M_{n-1}^2$  ausgezeichnet ist in der entsprechenden Spur  $[\mathfrak{G}]$  von  $\mathfrak{G}$ . Einige interessante Anwendungen, die z. B. ein Analogon zum Studyschen Übertragungsprinzip enthalten, beschließen die Arbeit. — In einem Anhang „Grundriß einer geometrischen Algebrenlehre“ wird gezeigt, wie sich die Lehre der hyperkomplexen Größen (Algebren) nach dem Vorbilde der gewöhnlichen komplexen Zahlen geometrisieren läßt. Wegen ihres Zusammenhanges mit Untermengen des vollen Matrizenringes  $O$  von  $(n+1)^2$  Elementen wird zuerst dieser geometrisiert. Zu diesem Zwecke wird die Grassmannsche Mannigfaltigkeit  $\Pi$  der  $R_n$  des  $R_{2n+1}$  durch eine projektiv invariante Konstruktion zum Träger des in geeigneter Weise zu einem algebraischen Kontinuum abgeschlossenen Matrizenringes gemacht. Es gilt dann (in Verallgemeinerung eines Ergebnisses von I. Johansson) der Satz, daß die kollineare Automorphiengruppe von  $\Pi$  isomorph ist der quasilinearen Gruppe über dem vollen Matrizenring. Als Beispiel wird die Möglichkeit der linearen Darstellung der Lorentzgruppe  $G_{11}$  durch Ternionen nachgewiesen. Es folgt eine geometrische Kennzeichnung der im vollen Matrizenring enthaltenen Unterringe, die Deutung von Zentrum, Nullteilern und charakteristischer Gleichung. Schließlich wird gezeigt, daß die elliptische Segresche  $M_n^2$  sich topologisch abbilden läßt auf die reellen Teile der umfassenderen Linksideale von  $O$ , wobei den Stellen 0 und  $\infty$  konjugiert-imaginäre Werte zuzuschreiben sind. Der Satz, daß einer synektschen Mannigfaltigkeit  $M_{2(n-1)}^2$  aus  $M_n^2$  ein  $2(n-1)$ -fach ausgedehnter Zug von Linksidealien zugeordnet ist, der von einem entsprechenden Zuge von Rechtsidealien in einem gewissen Sinne umhüllt wird, beschließt die beiden gedankenreichen und tiefeschürfenden Abhandlungen. K. Strubecker (Wien).

**Zassenhaus, Hans: Ein Verfahren, jeder endlichen  $p$ -Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik  $p$  zuzuordnen.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 200—207 (1939).

Die Zuordnung geschieht unter Benutzung der allgemeinen Sätze über freie Gruppen und Lie-Ringe (Witt, dies. Zbl. 16, 244; Magnus, dies. Zbl. 16, 294).  $\mathfrak{G}$  sei eine beliebige Gruppe,  $p$  eine Primzahl,  $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{Z}_2 = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$  werde von den Kommutatoren von  $\mathfrak{G}$  erzeugt,  $\mathfrak{Z}_{i+1} = (\mathfrak{Z}_i, \mathfrak{G})$ . Die charakteristischen Untergruppen  $\mathfrak{G}_n$  werden von allen  $p^j$ -ten Potenzen von Elementen aus den  $\mathfrak{Z}_i$  mit  $i \cdot p^j \geq n$  erzeugt.  $\mathfrak{G}_n/\mathfrak{G}_{n+1}$  ist abelsch und vom Typus  $(p, p, \dots)$  oder 1. Man bilde  $\mathfrak{G}_n/\mathfrak{G}_{n+1}$  abstrakt auf eine isomorphe additive Gruppe  $G_{(n)}$  ab,  $S \in \mathfrak{G}_n$  und  $S \in \mathfrak{G}_{n+1}$  bekommen das Bild  $\delta_n S$ . Der Modul  $G$  sei die direkte Summe der  $G_{(n)}$ , er hat die Charakteristik  $p$ . Die Kreis-multiplikation  $\delta_n S \circ \delta_m T = \delta_{n+m}(S, T)$  mit  $S \in \mathfrak{G}_n$ ,  $T \in \mathfrak{G}_m$ , also  $(S, T) \in \mathfrak{G}_{n+m}$ , läßt sich auf ganz  $G$  ausdehnen und macht  $G$  zu einem Lieschen Ring. Wenn  $\mathfrak{G}$  eine  $p$ -Gruppe ist, so enthält auch  $G$  genau  $(\mathfrak{G}:1)$  Elemente. Landherr (Rostock).

**Zassenhaus, Hans: Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik.** Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 1—100 (1939).

Das Ziel ist, alle Lieschen Ringe  $L$  (mit den Operationen  $a + b$ ,  $\lambda \cdot a$  und  $a \circ b$ ) über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  mit Primzahlcharakteristik  $\chi = p$  aufzustellen. Hierzu werden die Hilfsmittel, welche im Falle  $\chi = 0$  von Cartan benutzt wurden, soweit wie möglich oder mit den erforderlichen Abänderungen hergeleitet. Nach einleitenden Definitionen und vielen allgemeinen Sätzen über die festgesetzten Begriffe, wovon nur hervorgehoben sei, daß ein Liescher Ring mit nichtverschwindender Diskriminante  $\Delta$  halbeinfach und direkte Summe einfacher Liescher Ringe ist, daß aber bei  $\chi \neq 0$  die Umkehrung nicht immer gilt, folgt der Satz von Engel allgemein: Wenn für alle  $a$  und  $b$  aus  $L$  ein Ausdruck  $a \circ (a \circ (\dots (a \circ b) \dots))$  von gewisser Länge  $l(a, b)$  verschwindet, so ist  $L$  nilpotent, d. h. es gibt eine Länge  $l$ , so daß jedes Produkt  $a_1 \circ (a_2 \circ (\dots (a_{l-1} \circ a_l) \dots))$  mit  $a_i \in L$  verschwindet. Die Darstellungsmatrizen aus der regulären Darstellung nilpotenter Liescher Ringe besitzen nur einen Eigenwert und umgekehrt. Nun wird die Cartansche Zerlegung  $L = L_0 + L_\alpha + L_\beta + \dots$  nach den Eigenwerten  $0, \alpha, \beta, \dots$  eines geeigneten Elementes  $h$  des maximal nilpotenten Lieschen Teilringes  $H \subseteq L$  angesetzt, und es ist  $H = L_0$ . Von speziellen aus Matrizenringen hergeleiteten Lieschen Ringen wird die Einfachheit untersucht. Sodann werden alle einfachen und nichtabelschen Lieschen Ringe mit einer Basis  $e_1, e_2, \dots, e_r$  und den Rechenregeln  $e_1 \circ e_i = \alpha_i e_i$  ( $\alpha_1 = 0, \alpha_2, \dots, \alpha_r \bmod \chi$  inkongruente ganze Zahlen) aufgestellt. Eine wichtige Stellung nehmen die Endomorphismen  $\sigma$  ein. Die Abbildung  $\sigma$  von  $L$  auf  $\sigma(L) \subseteq L$  wird  $k$ -distributiv mit der Eigenschaft  $\sigma(a \circ b) = a \circ (\sigma b) + (\sigma a) \circ b$  definiert, Derivation bei Jacobson (dies. Zbl. 17, 292) genannt. Alle  $\sigma$  bilden den Lieschen Ring  $E(L)$ . Die Elemente  $a$  aus  $L$  selbst vermitteln eine solche Abbildung  $\sigma = a$  durch  $ab = a \circ b$ , dieses sind die inneren Endomorphismen, sie bilden  $I(L)$ .  $L$  heißt  $\sigma$ -einfach, wenn  $L$  kein echtes, unter  $\sigma$  invariantes Ideal enthält. Liesche Ringe mit  $\Delta \neq 0$  sind abgeschlossen, d. h.  $E(L) = I(L)$  und nur  $x = 0$  erfüllt  $x \circ L = 0$ . Der Faktoring  $E(L)/I(L)$  heißt der äußere Endomorphismenring  $\check{A}(L)$ . Jedes Element von  $\check{A}(L)$  besitzt einen Vertreter, welcher die Zerlegung  $L = L_0 + L_\alpha + \dots$  invariant läßt. Für die Matrizenringe kann man  $E(L)$  angeben. Unter Benutzung von Potenzringen und den dazugehörigen Moduln kann man alle  $\sigma$ -einfachen Lieschen Ringe mit endlicher Basis über  $k(\chi = p)$  konstruieren. Ein Darstellungsmodul  $\mathfrak{M}$  von  $L$  heißt  $(L, \sigma)$ -Modul, wenn es zu diesem  $\sigma \in E(L)$  eine lineare Transformation  $s$  von  $\mathfrak{M}$  mit  $(\sigma x)u = (xs - sx)u$  für alle  $x \in L$ ,  $u \in \mathfrak{M}$  gibt. Satz 10 auf S. 88 bezeichnet genau die irreduziblen  $(L, \sigma)$ -Moduln  $\mathfrak{M}$ , welche einen gegebenen  $L$ -Modul  $\mathfrak{m}$  enthalten. Wählt man in einem nilpotenten Lieschen Ring  $H/k$  eine geeignete Basis  $h_1, \dots, h_r$  aus, so können die (einzigen) Eigenwerte  $\alpha_i \in k$  der Elemente  $h_i$  beliebig vorgeschrieben werden, es gibt genau eine irreduzible Darstellung hierzu. Beim Induktionsbeweis werden die Endomorphismen von Unterringen heran-

gezogen. Die Darstellungen haben Grade  $p^\nu$  ( $\nu \geq 0$ ). Im Gegensatz zum Fall  $\chi = 0$  werden hier die Eigenwerte des allgemeinen Elementes  $h = \sum \lambda_i h_i$  Linearkombinationen aus gewissen  $p^\nu$ -ten Wurzeln von Polynomen  $p^\nu$ -ten Grades der Komponenten  $\lambda_i$ . Man kann so zu  $H$  eine treue und vollreduzible Darstellung angeben. *Landherr.*

**Ward, Morgan:** Ring homomorphisms which are also lattice homomorphisms. *Amer. J. Math.* 61, 783—787 (1939).

Bei einem Hauptidealring  $\mathfrak{S}$ , d. h. bei einem kommutativen Ring mit Einheits-  
element, dessen sämtliche Ideale Hauptideale sind, kann man mit den Hilfsmitteln  
der Ring- und Idealtheorie mühelos einen Überblick über die Menge der Homomorphis-  
men, d. h. letzten Endes der Restklassenringe von  $\mathfrak{S}$  gewinnen (vgl. z. B. W. Krull,  
S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1924). In der vorliegenden Note werden die Haupt-  
idealringe und ihre Homomorphismen bzw. Restklassenringe unter verbandstheo-  
retischen Gesichtspunkten untersucht. *Krull (Bonn).*

### **Zahl- und Funktionenkörper:**

**Schwarz, Stefan:** Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen  
Koeffizienten nach einem Primideal; Anwendung auf die Faktorzerlegung der Polynome  
in algebraischen Zahlkörpern. *Čas. mat. fys.* 68, 112—125 (1939).

Ziel ist die Zerlegung eines Polynoms  $f(z) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$  in  
irreduzible Faktoren in einem algebraischen Zahlkörper ( $\alpha_\nu$  ganze Zahlen daraus).  
Dazu werden zuerst die Koeffizienten der etwaigen Faktoren durch die  $\alpha_\nu$  abgeschätzt,  
und das Verhalten von  $f(x)$  nach einer genügend hohen Potenz eines Primideals liefert  
dann die gewünschte Zerlegung. Dieser Weg ist — entgegen der Meinung des Verf. —  
jedoch nur gangbar, wenn der rationale oder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper  
zugrunde liegt; in allen anderen Zahlkörpern existieren ganze algebraische Zahlen  $\neq 0$ ,  
deren absoluter Betrag unter 1 liegt, und an diesem Umstand scheitert das angegebene  
Verfahren. Vorschlag zur Reparatur: Man führe die Abschätzung der Koeffizienten  
der Faktoren von  $f(x)$  gleichzeitig für alle zu  $f(x)$  konjugierten Polynome durch. —  
Im übrigen ist auch die hier als Vorbereitung angegebene Methode zur Zerlegung von  
 $f(x)$  in einem endlichen Körper nicht ganz einwandfrei. *Reichardt (Leipzig).*

**Bergström, Harald:** Über Invarianten biquadratischer Zahlkörper. (*Helsingfors*,  
23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 151—154 (1939).

Auszug aus der Dissertation des Verf. (dies. Zbl. 18, 104). *Reichardt (Leipzig).*

**MacLane, Saunders, and O. F. G. Schilling:** Infinite number fields with Noether  
ideal theories. *Amer. J. Math.* 61, 771—782 (1939).

Gefragt wird nach solchen unendlichen algebraischen Zahlkörpern  $\mathfrak{K}$ , in deren  
Hauptordnung jedes Ideal das Produkt von endlich vielen Primidealen ist. Ein Kör-  
per  $\mathfrak{K}$  besitzt dann und nur dann die gewünschte Eigenschaft, wenn die folgende Be-  
dingung erfüllt ist: Sei  $\mathfrak{K}_0$  irgendein fester, in  $\mathfrak{K}$  enthaltener endlicher algebraischer  
Zahlkörper,  $\mathfrak{p}_0$  ein beliebiges Primideal aus der Hauptordnung von  $\mathfrak{K}_0$ , dann gibt es  
stets in  $\mathfrak{K}$  einen endlichen algebraischen Oberkörper  $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_0)$  von  $\mathfrak{K}_0$  mit der Eigenschaft,  
daß jeder der Primidealfaktoren, in die  $\mathfrak{p}_0$  beim Übergang von  $\mathfrak{K}_0$  zu  $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_0)$  verfällt,  
seinerseits beim Übergang von  $\mathfrak{K}(\mathfrak{p}_0)$  zu  $\mathfrak{K}$  Primideal bleibt. — Auf Grund dieser vom  
Standpunkt der Bewertungstheorie fast selbstverständlichen Bemerkung kann man  
leicht beliebig viele Körper der gesuchten Art konstruieren. Man braucht dabei nur  
die beiden Tatsachen, daß a) jeder endliche algebraische Zahlkörper  $\mathfrak{K}_0$  nur abzählbar  
viele Primideale  $\mathfrak{p}_0$  enthält, und daß b) für jedes  $\mathfrak{p}_0$  der Restklassenkörper  $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{p}_0$   
algebraische Oberkörper von beliebig hohem Grade besitzt. Die gewonnenen Ergeb-  
nisse lassen sich mühelos auf den Fall übertragen, daß an Stelle eines unendlichen  
algebraischen Zahlkörpers ein entsprechender Körper von algebraischen Funktionen  
einer Veränderlichen über einen geeigneten abzählbaren Grundkörper  $K$  tritt. — Es  
gelingt sogar der Nachweis, daß man sich unter gewissen speziellen Annahmen von der  
Abzählbarkeitsvoraussetzung freimachen kann. Die diesbezüglichen Untersuchungen

verdienen vor allem deshalb besonders hervorgehoben zu werden, weil sie allein etwas umständlichere Betrachtungen erfordern, während man im übrigen bei allen Beweisen mit sehr einfachen und naheliegenden Überlegungen auskommt. *Krull (Bonn).*

**Arf, Cahit:** Untersuchungen über reinverzweigte Erweiterungen diskret bewerteter perfekter Körper. *J. reine angew. Math.* 181, 1—44 (1939).

Ein Hauptziel dieser Arbeit ist ein neuer Beweis der Tatsache, daß die Exponenten  $e_\chi$  der Artinschen Führer  $f(\chi, K/k) = \prod_p \mathfrak{p}^{e_\chi}$  relativ-galoisscher Zahlkörper ganze

Zahlen sind. Dieser Beweis wird gleich für galoissche separable Erweiterungen  $K/k$  von beliebigen diskret bewerteten Körpern  $k$  mit dem Primideal  $\mathfrak{p}$  geführt und stützt sich auf zwei Untersuchungen über rein verzweigte Erweiterungen  $K/k$  von selbständigem Wert: 1. Betrachtung der zwischen den Primelementen  $\pi$  und  $\Pi$  aus  $k$

und  $K$  bestehenden Gleichung  $\pi = \prod_{i=0}^n \varrho_i \Pi^i$  und Herleitung von Körperinvarianten

von  $K/k$  aus ihr; speziell Behandlung der Frage, wie die Koeffizienten  $\varrho_i$  abgeändert werden können, ohne daß gleichzeitig  $K$  geändert wird. 2. Betrachtung derjenigen maximalen kommutativen Teilkörper  $K_I/k$  einer einfachen normalen Algebra  $A/k$ , welche durch Adjunktion von Primelementen  $I$  einer bestimmten Ordnung aus  $A$  zu  $k$  entstehen. Hierbei ergibt sich eine bemerkenswerte neue Charakterisierung des Artinschen Führerexponenten: Es sei  $K/k$  reinverzweigt, galoissch und separabel, und  $\chi$  ein einfacher Charakter der Galoisgruppe  $G$  von  $K/k$ . Ferner sei  $A/k$  eine normale einfache Algebra vom Grad  $(K:k)$  und Index  $\chi^{(1)}$ , und  $K'$  sei der Unterkörper von  $K$ , welcher zu derjenigen Untergruppe von  $G$  gehört, die durch  $\chi$  identisch dargestellt wird.  $I$  bezeichne ein Primelement eines maximalen kommutativen reinverzweigten Teilkörpers von  $A$ , der einen mit  $K'$  isomorphen Unterkörper enthält. Ist dann  $\mathfrak{P}$  das Primideal einer Maximalordnung von  $A$ , die  $I$  enthält, so erzeugen alle Elemente  $\Gamma_1 \equiv \Gamma \bmod \mathfrak{P}^{e_\chi - \chi^{(1)} + 1}$  (multiplikative Kongruenz!) ebenfalls reinverzweigte maximale kommutative Teilkörper von  $A$ , die zu  $K'$  isomorphe Unterkörper enthalten, und  $\mathfrak{P}^{e_\chi - \chi^{(1)} + 1}$  ist der größte Modul mit dieser Eigenschaft. *Eichler (Göttingen).*

**Davenport, H.:** On character sums in finite fields. *Acta math.* 71, 99—121 (1939).

Es sei  $k$  ein Galoisfeld von  $q$  Elementen,  $\chi_1, \dots, \chi_r$  multiplikative Charaktere von  $k$ , jeder verschieden vom Hauptcharakter  $\chi_0, f_1(x), \dots, f_r(x)$   $r$  verschiedene (auf höchsten Koeffizienten 1) normierte, über  $k(x)$  irreduzible Polynome von den Graden  $k_1, \dots, k_r$  und  $K = k_1 + \dots + k_r$ . Ist  $g$  ein weiteres normiertes Polynom in  $x$ , so bezeichne  $(f, g) = \prod_{\vartheta} f(\vartheta)$  [ $\vartheta$  durchläuft alle Wurzeln von  $g(x) = 0$ ] die Resultante von  $f$  und  $g$ .

Verf. definiert Charaktersummen der Gestalt

$$S(f, \chi) = \sum_{x \text{ in } k} \chi_1(f_1(x), \dots), \chi_r(f_r(x)) \quad \text{und } L\text{-Reihen} \quad L(f, \chi; s) = \sum_{v=0}^{\infty} \sigma_v q^{-vs}$$

der komplexen Variablen  $s$  mit  $\sigma_v = \sum_g \chi_1((f_1, g), \dots), \chi_r((f_r, g))$ , wobei sich die Sum-

mation über alle normierten Polynome  $g(x)$  über  $k$  vom Grade  $v$  erstreckt. Es werden drei Hauptresultate bewiesen: (1) Es sei  $\chi^{(h)}$  der in bekannter Weise durch  $\chi$  in  $k^{(h)}$  (Galoisfeld von  $q^h$  Elementen) induzierte Charakter und  $S^{(h)}(f, \chi)$  die in  $k^{(h)}$  analog gebildete Charaktersumme.  $L(f, \chi; s)$  ist vom Grade  $K - 1$  und besitze die Nullstellen  $s_1, \dots, s_{K-1}$ . Dann ist  $-S^{(h)}(f, \chi^{(h)}) = q^{hs_1} + \dots + q^{hs_{K-1}}$ . (2) Ist  $\chi_1^{k_1} \dots \chi_r^{k_r} \neq \chi_0$ , so genügt  $L(f, \chi; s)$  der Funktionalgleichung

$$q^{\frac{1}{2}(K-1)s} L(f, \chi; s) = \varepsilon(f, \chi) q^{\frac{1}{2}(K-1)(1-s)} L(f, \bar{\chi}, 1-s)$$

mit  $|\varepsilon(f, \chi)| = 1$ . Ist  $\chi_1^{k_1} \dots \chi_r^{k_r} = \chi_0$ , so genügt  $L_1 = L(f, \chi; s) : (1 - q^{-s})$  einer entsprechenden Funktionalgleichung. (3) Für den Realteil  $R(s)$  jeder Nullstelle  $s$  von  $L$  gilt  $\theta_K \leq R(s) \leq 1 - \theta_K$  mit  $\theta_3 = \frac{1}{4}$  und  $\theta_K = \frac{3}{2(K+4)}$  für  $K \geq 4$ . Insbesondere ist  $|S(f, \chi)| \leq (K-1)q^{1-\theta_K}$ .

Es sei  $\chi$  ein Charakter möglichst kleiner Ordnung  $n$  ( $n/q - 1$ ), so daß sich die Charaktere  $\chi_i = \chi^{k_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) als Potenzen von  $\chi$  darstellen lassen. Dann ist die hier definierte  $L$ -Funktion unter den  $L$ -Funktionen des durch  $y^* = f(x) = \prod_{i=1}^r f_i(x)^{k_i}$  zyklisch erzeugten algebraischen Funktionenkörpers  $K = k(x, y)$  enthalten. Ein Vergleich mit den Charakteren von  $K/k(x)$  (s. dazu Hasse, dies. Zbl. 10, 5) zeigt, daß die Koeffizienten der zum Charakter  $\chi$  gehörigen  $L$ -Reihe von  $K/k(x)$  mit den hier durch Resultantenbildung definierten  $\sigma_r$  übereinstimmen (auch bez. der Führerprimeiler). Resultat (1) erscheint hiernach als Spezialfall des Artinschen Satzes über den Zusammenhang der Zetafunktion  $\zeta^{(n)}(s)$  des Körpers  $K^{(n)} = K k^{(n)}$  mit der Zetafunktion  $\zeta(s)$  von  $K$  (s. z. B. Hasse, dies. Zbl. 9, 292), der natürlich auch noch für  $L$ -Funktionen gültig bleibt. Resultat (2) ist als Spezialfall der Funktionalgleichung der allgemeinen  $L$ -Reihen anzusehen (s. z. B. Weissinger, dies. Zbl. 18, 389). Vom Standpunkt der Theorie der algebraischen Funktionen aus liegt die Bedeutung der Arbeit im Resultat (3), das eine Annäherung an die R.V. für den fraglichen Funktionenkörper bringt. Die Abschätzung (3) gestattet auch eine Aussage über die Verteilung der Potenzreste mod  $p$ . Die zum Beweis von (3) benutzte Methode ist eine Verfeinerung einer vom Verf. schon früher angewandten Methode (s. dies. Zbl. 18, 109). H. L. Schmid (Gießen).

**Wegner, Udo:** Über algebraische Funktionen vom Geschlecht Eins, die durch Rationale darstellbar sind. Deutsche Math. 4, 391—403 (1939).

Ist das Geschlecht  $p'$  der Riemannschen Fläche der Galoisschen Resolvente einer algebraischen Funktion vom Primzahlgrad kleiner oder gleich Eins, so ist der Funktionenkörper auflösbar, ausgenommen wenn er durch die Resolvente 5. Grades der Ikosaedergleichung definiert werden kann. Das Geschlecht  $p$  des Körpers selbst ist stets  $= 0$ , und die definierenden Gleichungen dieser Körper können direkt angegeben werden. Ist das Geschlecht  $p$  eines auflösbaren Funktionenkörpers vom Primzahlgrad  $n$  größer als Null, so hat die Monodromiegruppe eine Ordnung  $\frac{n(n-1)}{d}$  mit  $d|2p$  und das Geschlecht  $p'$  der Galoisschen Resolvente ist  $\geq p$ , mit dem Gleichheitszeichen nur im Fall eines zyklischen Körpers. Für  $p = 1$  gibt es nur zwei Typen von auflösbaren Körpern von Primzahlgrad  $n \geq 5$ , nämlich Körper vom Grade 5 und 7, deren definierende Gleichungen direkt angegeben werden können. van der Waerden.

**Siegel, Carl Ludwig:** Einführung in die Theorie der Modulfunktionen  $n$ -ten Grades. Math. Ann. 116, 617—657 (1939).

Es werden die Matrizen  $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$  betrachtet, wo  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  ganzzahlige  $n$ -reihige Matrizen mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\mathfrak{C}', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = \mathfrak{E}$$

sind. Diese Eigenschaften lassen sich zu  $\mathfrak{M}\mathfrak{J}\mathfrak{M}' = \mathfrak{J}$  zusammenfassen, wo  $\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \\ 0 & -\mathfrak{E} \end{pmatrix}$  ist.  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{E}$  bezeichnen die  $n$ -reihige Nullmatrix und Einsmatrix. Wegen  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}'$  heißt das ganzzahlige Matrizenpaar  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  symmetrisch. Es ist überdies teilerfremd in dem Sinne, daß  $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{G}\mathfrak{B}$  nur dann beide ganzzahlig sind, wenn die Matrix  $\mathfrak{G}$  selbst ganzzahlig ist. Ebenso ist  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  ein ganzzahliges symmetrisches teilerfremdes Matrizenpaar. Es gilt  $|\mathfrak{M}| = 1$ . — Sei  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$  eine variable komplexwertige  $n$ -reihige symmetrische Matrix mit positivem Imaginärteil  $\mathfrak{Y}$  (d. h. die zu  $\mathfrak{Y}$  gehörige quadratische Form ist positiv definit). Unter der (inhomogenen) Modulgruppe  $n$ -ten Grades wird die Gruppe  $\Gamma$  der Substitutionen

$$\mathfrak{Z}_1 = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}$$

verstanden. Zwei Matrizen  $\mathfrak{M}$  liefern dann und nur dann dieselbe (inhomogene) Modulsubstitution, wenn sie bis aufs Vorzeichen übereinstimmen. Deutet man die  $n(n+1)$  Koeffizienten  $x_{kl}$  und  $y_{kl}$  ( $k \leq l$ ) von  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{Y}$  als kartesische Koordinaten eines Punktes, so bilden alle Matrizen  $\mathfrak{Z}$  eine offene konvexe Punktmenge  $P$ , die von endlich vielen algebraischen Flächen begrenzt ist. Es wird bewiesen, daß die Modulgruppe  $\Gamma$  in der Punktmenge  $P$  einen abgeschlossenen zusammenhängenden Fundamentalbereich  $F$  besitzt, der von endlich vielen algebraischen Flächen begrenzt ist, derart, daß jeder Punkt von  $P$  entweder genau einem inneren Punkt von  $F$  oder höchstens

endlich vielen Randpunkten von  $F$  nach  $\Gamma$  äquivalent ist.  $F$  wird explizit durch folgende drei Bedingungen beschrieben: 1. Es ist  $\|\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}\| \geq 1$  für alle ganzzahligen symmetrischen teilerfremden Matrizenpaare  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ . 2.  $\mathfrak{Y}$  genügt den Minkowskischen Reduktionsbedingungen:  $\mathfrak{g}'_k \mathfrak{Y} \mathfrak{g}_k \geq y_{kk}$  für jede ganzzahlige Spalte  $\mathfrak{g}_k$ , deren Koeffizienten  $g_k, \dots, g_n$  teilerfremd sind ( $k = 1, \dots, n$ );  $y_{k,k+1} \geq 0$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ); 3.  $-\frac{1}{2} \leq x_{kl} \leq \frac{1}{2}$  ( $k, l = 1, \dots, n$ ). Unter einer Modulform  $n$ -ten Grades wird eine Funktion  $\varphi(\mathfrak{Z})$  verstanden, die in  $P$  regulär-analytisch und in  $F$  beschränkt ist, und die bei  $\Gamma$  das Verhalten

$$\varphi(\mathfrak{Z}_1) = |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^g \varphi(\mathfrak{Z})$$

mit einer festen geraden ganzen Zahl  $g$  hat, die das Gewicht der Modulform heißt. Wie sich herausstellt, gibt es für  $g < 0$  nur die identisch-verschwindende Modulform und für  $g = 0$  nur die identisch-konstanten Modulformen. Es besteht eine Fourierentwicklung

$$\varphi(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{X}} a(\mathfrak{X}) e^{2\pi i \cdot \sigma(\mathfrak{X}\mathfrak{Z})}.$$

Hierin durchläuft  $\mathfrak{X}$  alle symmetrischen  $n$ -reihigen Matrizen, deren zugehörige quadratische Form ganzzahlige Koeffizienten hat ( $t_{kk}$  und  $2t_{kl}$  ganz), und  $\sigma$  bezeichnet die Matrizenspur. Die Koeffizienten  $a(\mathfrak{X})$  sind nur für nichtnegative  $\mathfrak{X}$  von Null verschieden (d. h. die zu  $\mathfrak{X}$  gehörige quadratische Form ist positiv semidefinit). Als erstes Hauptresultat wird bewiesen: Zwischen je  $h = \frac{n(n+1)}{2} + 2$  Modulformen  $n$ -ten Grades

besteht eine isobare algebraische Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Genauer: Es gibt eine nur von  $n$  abhängige natürliche Zahl  $c$  derart, daß zwischen  $h$  beliebigen Modulformen mit den Gewichten  $g_1, \dots, g_h$  stets eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht  $cg_1 \cdots g_h$  besteht. Der Beweis ergibt sich wesentlich aus dem folgenden Satz, in dem  $D(\mathfrak{X})$  den größten gemeinsamen Teiler der  $r$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix  $\mathfrak{X}$  vom Range  $r$  bedeutet: Sind die Fourierkoeffizienten  $a(\mathfrak{X}) = 0$  für alle  $\mathfrak{X}$  mit  $D(\mathfrak{X}) \leq T$ , wo  $T > cg^n$  mit nur von  $n$  abhängigem  $c$  ist, so verschwindet  $\varphi(\mathfrak{Z})$  identisch. — Als zweites Hauptresultat wird die Existenz von  $h-1$  algebraisch-unabhängigen Modulformen  $n$ -ten Grades bewiesen. Dazu werden die Eisensteinschen Reihen

$$\psi_g(\mathfrak{Z}) = \sum_{\{\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}} |\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D}|^{-g}$$

betrachtet, wo  $g$  eine gerade natürliche Zahl ist und  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  ein volles Repräsentantensystem der Klassen ganzzahliger symmetrischer teilerfremder Matrizenpaare durchläuft (zwei Paare  $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$  rechnen zur selben Klasse, wenn  $\mathfrak{C}\mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{C}'_1$  ist). Diese Reihen konvergieren in  $P$  dann und nur dann, wenn  $g > n+1$  ist, und zwar gleichmäßig in  $F$ . Sie sind nicht identisch verschwindende Modulformen  $n$ -ten Grades von den Gewichten  $g$ . Von einer festen dieser Modulformen  $\psi_g$  ausgehend werden die Modulfunktionen  $f_k = \psi_{kg} \varphi_g^{-k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) gebildet. Es wird gezeigt, daß es unter ihnen  $q = \frac{n(n+1)}{2}$  algebraisch unabhängige  $f_{k_1}, \dots, f_{k_q}$  gibt, so daß  $\psi_g, \psi_{k_1g}, \dots, \psi_{k_qg}$

algebraisch-unabhängige Modulformen sind. — Unter einer Modulfunktion  $n$ -ten Grades wird ein Quotient von Modulformen  $n$ -ten Grades gleichen Gewichtes verstanden. Die Modulfunktionen sind meromorphe bei der Modulgruppe  $\Gamma$  invariante Funktionen in  $P$ , die für alle Punkte  $\mathfrak{Z}$  aus  $F$  mit hinreichend großem  $\|\mathfrak{Z}\|$  als Quotienten zweier Fourierreihen der obigen Gestalt mit nichtnegativen  $\mathfrak{X}$  darstellbar sind. Ohne Beweis wird darauf hingewiesen, daß auch umgekehrt jede solche Funktion eine Modulfunktion im angegebenen Sinne ist. Als drittes Hauptresultat wird bewiesen: Jede Modulfunktion läßt sich rational durch die Eisensteinschen Reihen ausdrücken, und zwar als Quotient zweier isobarer Polynome gleichen Gewichtes. Die Modulfunktionen  $n$ -ten Grades bilden einen algebraischen Funktionenkörper mit genau  $\frac{n(n+1)}{2}$  algebraisch-unabhängigen Elementen. — Schließlich wird gezeigt, daß die Fourierkoeffizienten der Eisensteinschen Reihen rational sind und daher auch die Koeffizienten der zwischen

ihnen bestehenden algebraischen Gleichungen. Die Beweismethoden der Arbeit liefern zudem eine Methode, diese algebraischen Gleichungen wirklich aufzustellen.

H. Hasse (Göttingen).

## **Zahlentheorie:**

**Bachmann, Friedrich:** Aufbau des Zahlensystems. Enzyklopädie d. math. Wiss. 1, Tl 1, H. 2, 28 S. (1939).

Der Artikel behandelt A. die axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen, deren Auffassung als Ordinal- und Kardinalzahlen und die mengentheoretische Begründung der elementaren Arithmetik, B. den Aufbau der Systeme der reellen und dann der komplexen Zahlen aus den natürlichen. Der Aufbau der rationalen Zahlen wird auf einen allgemeinen Erweiterungssatz gestützt, der die Erweiterung gewisser Bereiche mit verknüpfbaren Elementen zu einer abelschen Gruppe sichert. Überblick über die verschiedenen Wege zu den reellen Zahlen; die Fundamentalfolgen werden vorangestellt, wie das auf Grund der bequemen Verallgemeinerungsmöglichkeit für nicht-archimedische Bewertungen  $\varphi(a)$  an Stelle des absoluten Betrages sich darbietet; die daran anschließende  $\varphi$ -Konvergenz von Folgen wird hier aber nur erwähnt und bleibt im übrigen späteren Artikeln vorbehalten. Breiteren Raum finden dann noch die Sätze über Abgeschlossenheit der erreichten Körper der reellen (komplexen) Zahlen in bezug auf das Erzeugungsverfahren (daß dessen Iteration nichts Neues liefere) und über Vollständigkeit dieser Körper (daß sie, von isomorphen abgesehen, „größte“ Körper in bezug auf archimedische Ordnung bzw. Bewertung sind). — In der Art der Einzeldurchführung der Neuauflage der Enzyklopädie dient in der Hauptsache die Erstauflage als Vorbild. Doch ist größere Lesbarkeit angestrebt und hier erreicht. Am Beginn jedes Artikels steht nun eine Liste von Fachausdrücken deutsch, englisch, französisch, italienisch (s. a. dies. Zbl. 21, 213, Knopp). Ullrich (Gießen).

**Gupta, Hansraj:** Analogues of Bauer's theorems. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9, 396—398 (1939).

Es sei  $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(m)}$  ein reduziertes Restsystem mod  $m$ . Dann ist  $\prod_{i=1}^{\varphi(m)} (x - r_i) \equiv x^{\varphi(m)} - 1 \pmod{m}$  für  $m = p$  (Primzahl) richtig, nicht aber für beliebiges  $m$ . Es gelten hingegen die Sätze von Bauer. Ferner beweist der Verf. durch vollständige Induktion die folgenden Sätze: Es sei  $P = \prod_{a=1}^n (x + a)$ ; dann ist  
 1.  $P \equiv (x^p - x)^{n/p} \pmod{n}$  für  $n = p^u$  ( $p$  ungerade Primzahl,  $u \geq 1$  oder  $p = 2, u = 1$ );  
 2.  $P \equiv \{(x-1)x(x+1)(x+2)\}^{n/4} \pmod{n}$  für  $n = 2^u$  und  $u \geq 2$ ; 3.  $P \equiv \left\{ \prod_{a=1}^{n/q} (x + a) \right\}^q \pmod{p^u}$  für  $n = p^u q$ ,  $(p, q) = 1$ . Hofreiter (Wien).

● **Weber, Werner:** Die Pellsche Gleichung. (Deutsche Math. Beih. 1.) Leipzig: S. Hirzel 1939. IV, 151 S. RM. 5.—

Dieses ausführliche Nachschlagewerk über die Diophantische Gleichung  $t^2 - Du^2 = h$  ( $h$  ist dabei fast immer  $\pm 1$  oder  $\pm 4$ ) gibt das, was man über die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Arten dieser Gleichung (je nach den Voraussetzungen über  $D$  und  $h$ ) und über die Gleichung selbst für gewöhnlich „als bekannt voraussetzt“. Neben den üblichen elementaren Dingen (Kettenbrüche u. ä.) wird vor allem systematisch die Theorie der Einheiten und Ordnungen der reellen quadratischen Zahlkörper zur einheitlichen Darstellung herangezogen, wogegen die Berührungspunkte mit „höheren“ Dingen (Kreisteilung und Klassenkörpertheorie) vermieden werden und der Zusammenhang mit den binären quadratischen Formen nur so weit verfolgt wird, wie sich daraus Aufschlüsse über die Gleichung selbst ergeben. Den Schluß bildet eine Übersicht über alle Tafeln für diese Gleichungen. Reichardt (Leipzig).

**Weber, Werner:** Über die doppelte Zerlegung in zwei teilerfremde Quadrate mittels der Perioden binärer quadratischer Formen. Deutsche Math. 4, 361—369 (1939).

Man nennt eine reelle quadratische Irrationalzahl  $\omega$  reduziert, wenn  $\omega > 1$  und  $-1 < \bar{\omega} < 0$ . Es gibt dann natürliche Zahlen  $d, b, S$  mit  $\omega = \frac{\sqrt{d} + b}{S}$ . Die vollständigen Quotienten der Kettenbruchentwicklung von  $\omega$  sollen mit  $\omega_n$  bezeichnet werden. Dann gilt  $\omega_n = \frac{\sqrt{d} + b_n}{S_n}$ . Da die Kettenbruchentwicklung periodisch ist, so gilt  $\omega_{n+l} = \omega_n$ , wo  $l$  ein Vielfaches der Periodenlänge ist. Es sei  $D \equiv 1 \pmod{4}$ , kein Quadrat und größer 0. Unter  $\mu$  verstehe man die größte ungerade, unter  $\lambda$  die größte ganze Zahl  $< \sqrt{D}$ . Dann sind insbesondere  $\omega' = \frac{\sqrt{d} + \mu}{2}$  und  $\omega'' = \sqrt{D} + \lambda$  reduzierte Zahlen. Hierzu gehören die Zahlen  $D, b', S'$  bzw.  $D, b'', S''$  und zu den vollständigen Quotienten  $b'_n, S'_n$  bzw.  $b''_n, S''_n$ . Gibt es für  $\omega'$  und  $\omega''$  je ein ungerades  $l > 0$  mit  $\omega'_{n+l} = \omega'_n$  bzw.  $\omega''_{n+l} = \omega''_n$ , so sei  $l = 2p - 1$  bzw.  $l = 2q - 1$ . Dann ist  $D = b_p'^2 + S_p'^2$  und  $D = b_q''^2 + S_q''^2$ , womit  $D$  auf doppelte Weise als Summe zweier teilerfremder Quadrate dargestellt wird. Falls  $D$  eine Primzahl ist, so zeigte schon Gauß, daß sich die beiden Zerlegungen nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden. Weber zeigt, daß dies keine spezielle Eigenschaft der Primzahlen ist, sondern für jedes in kommende Frage  $D$  gilt. Hierfür werden zwei Beweise erbracht. *Hofreiter.*

**Kapferer, Heinrich:** Über eine periodische Funktion von drei ganz rationalen Veränderlichen und deren zahlentheoretische Bedeutung. Mh. Math. Phys. 47, 285—298 (1939).

Untersuchung der Funktion  $T(x, n)$ , die für ganzzahlige  $x, n, d$  ( $n \geq 0, d \geq 1$ ) rekursiv durch  $T(x, n) - T(x-1, n) = T(x, n+1)$  und  $T(x, 0) = 0$  bzw. 1 für  $x \not\equiv 0$  bzw.  $x \equiv 0 \pmod{d}$  definiert ist. Die  $T$ -Funktion hat in  $x$  die Periode  $d$  und läßt sich explizit als Summe von Binomialkoeffizienten darstellen. Man kann sie ferner mittels einer primitiven  $d$ -ten Einheitswurzel  $\eta$  explizit durch  $T(x, n) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \eta^{-xk} (1 - \eta^k)^n$  definieren. Es ergeben sich einfache Beweise für frühere

Resultate des Verf. [Arch. Math. Phys. 23, 117—124 (1914); Diss. Freiburg i. B. 1917], die gleichzeitig in einen allgemeineren Zusammenhang eingeordnet werden. Die zahlen-theoretische Bedeutung liegt in der Möglichkeit, für jedes  $n$  und  $d$  eine arithmetische

Form aufzustellen, die für angebbare  $T$ -Funktionswerte den Wert  $(-1)^{\left[\frac{d-1}{2}\right] \left[\frac{n-1}{2}\right] \left[\frac{n-1}{d}\right]}$  annimmt. Dies wird ausführlich diskutiert und (im Fall  $n, d$  ungerade Primzahlen) der Zusammenhang mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz abgeleitet.

*Rohrbach* (Göttingen).

**Scherk, Peter:** Eine Bemerkung über Mengen natürlicher Zahlen. Čas. mat. fys. 68, 31—32 (1939).

$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  seien Mengen natürlicher Zahlen,  $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$  die Summenmenge im Sinne von Besicovitch,  $E_\nu(x)$  die Anzahl der Elemente  $\leq x$  von  $\mathfrak{M}_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ). Ist dann  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1, 0 \leq \beta - \delta < 1$  und  $E_1(x) \geq \alpha x, E_2(x) \geq \beta x + \delta$  für alle  $x > 0$ , so gilt für alle  $x > 0$

$$E_3(x) \geq \text{Max} \left( \frac{\alpha + \delta}{1 - \beta + \delta}, \frac{\alpha + \beta}{1 + \beta - \delta}, \alpha + \beta - \alpha(\beta - \delta) \right) x.$$

Diese Abschätzung für die Dichte der Summenmenge (die nach dem Verfahren von Besicovitch bewiesen wird) verbindet die Abschätzungen von Landau und von Schur ( $\delta = 0$ ) mit der von Besicovitch ( $\delta = \beta$ ). *Rohrbach* (Göttingen).

**Scherk, Peter:** Bemerkungen zu einer Note von Besicovitch. J. London Math. Soc. 14, 185—192 (1939).

Ausführliche Darstellung des Beweises für einen an anderer Stelle (vgl. vorsteh. Ref.) nur kurz veröffentlichten Satz des Verf. Ferner wird das dem Beweis

zugrunde liegende Verfahren von Besicovitch zweimal modifiziert, um weitere Abschätzungen für die Anzahlfunktion der Summe zweier Mengen durch die Anzahlfunktionen der Summanden zu erhalten.

Rohrbach (Göttingen).

**Schnirelmann, L.:** On addition of sequences and sets. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 211—214 (1939).

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen natürlicher Zahlen,  $m_i$  die Elemente von  $A$ ,  $n_j$  die von  $B$ ;  $A + B$  die Menge aller Zahlen  $m_i$ ,  $n_j$  und  $m_i + n_j$ ,  $\overline{A + B}$  die Menge aller Zahlen  $m_i + n_j$  und  $m_i + n_j - 1$ ;  $M_x$  bzw.  $N_x$  die Anzahl der Elemente  $\leq x$  von  $A$  bzw.  $B$ ,  $D_t(A) = \text{Min} \frac{M_x}{x}$ ,  $D_t(B) = \text{Min} \frac{N_x}{x}$  ( $x = 1, 2, \dots, t$ ),  $D_t(A) > 0$ ,  $D_t(B) > 0$ . Dann wird gezeigt:

$$D_t(\overline{A + B}) \geq \text{Min}(1, D_t(A) + D_t(B)).$$

Diese Abschätzung steht in engem Zusammenhang mit der bekannten Vermutung  $D(A + B) \geq \text{Min}(1, D(A) + D(B))$  über die Dichte  $D(A)$  einer Menge  $A$  natürlicher Zahlen. Denn es ist  $D(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_t(A)$ , und wegen  $D_t(A) > 0$  und  $D_t(B) > 0$  gehört 1 zu  $A$  und zu  $B$ , ist also  $A + B$  in  $\overline{A + B}$  enthalten. — Ferner wird der Dichtebegriff für Mengen natürlicher Zahlen auf Mengen positiv-reeller Zahlen übertragen und für diese das Analogon zu der obengenannten Vermutung bewiesen. — Die Untersuchungen stammen aus dem Nachlaß des Verf., der sie bereits 1932—1933 angestellt hat.

Rohrbach (Göttingen).

**Erdős, P., and M. Kac:** On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 206—207 (1939).

Eine zahlentheoretische Funktion  $f(m)$  heißt additiv, wenn  $f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2)$  für  $(m_1, m_2) = 1$  gilt. Es sei  $f(p^\alpha) = f(p)$  und  $|f(p)| \leq 1$  für jede Primzahl  $p$  (es genügt auch eine schwächere Voraussetzung), ferner die Folge  $F(n) = \sum_{p < n} f^2(p) p^{-1}$  divergent.

Dann ist für jedes reelle  $\omega$  die natürliche Dichte der ganzen Zahlen  $m$  mit

$$f(m) < \sum_{p < m} \frac{f(p)}{p} + \omega \sqrt{2F(m)}$$

gleich  $\pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\omega} \exp(-y^2) dy$ . Dieser Satz sowie zwei Hilfssätze, auf denen der Beweis beruht, werden ohne Beweis angegeben. Für  $\omega = 0$  folgt: Die Dichte der ganzen Zahlen  $m$  mit  $f(m) < \sum_{p < m} \frac{f(p)}{p}$  ist  $\frac{1}{2}$ . Dies wurde im Spezialfall  $f(m) = \text{Anzahl der verschiedenen Primteiler von } m$  bereits von Erdős bewiesen.

Rohrbach (Göttingen).

**Davenport, H., and P. Erdős:** On sums of positive integral  $k^{\text{th}}$  powers. Ann. of Math., II. s. 40, 533—536 (1939).

Verschärfung der Ungleichheit  $N_S^{(k)}(n) > n^{\alpha_1 - \varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , von Hardy und Littlewood, für die Anzahl  $N_S^{(k)}(n)$  der Zahlen  $< n$ , die eine Summe von  $S$  positiven  $k$ -ten Potenzen sind (s. auch dies. Zbl. 19, 395).

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Erdős, P.:** Note on products of consecutive integers. J. London Math. Soc. 14, 194—198 (1939).

Die bekannte Vermutung, daß für ganzzahlige  $k > 1$ ,  $l > 1$  ein Produkt von  $k$  aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine  $l$ -te Potenz sein kann, wird für  $l = 2$  und beliebiges  $k$  bewiesen. In einem Zusatz bei der Korrektur weist Verf. auf das (kurz vorher veröffentlichte) etwas weitergehende Resultat von O. Rigge hin (vgl. dies. Zbl. 21, 10).

Rohrbach (Göttingen).

**Gloden, A.:** Sur la résolution en nombres entiers du système  $A^{kx} + B^{kx} + C^{kx} + D^{kx} = E^x + F^x + G^x + H^x$  ( $x = 1, 2$  et 3). Bol. mat. 12, 118—122 (1939).

**Pol, Balth. van der:** Application of the operational or symbolic calculus to the theory of prime numbers. Philos. Mag., VII. s. 26, 921—940 (1938).

Unter Verwendung des Heavisidekalküls wird ein heuristischer Beweis des Prim-

zahlsatzes und verwandter Sätze gebracht. Dabei werden auch graphische Darstellungen von  $\zeta(s)$ ,  $\log \zeta(s)$  usw. verwendet.

*Edmund Hlawka* (Wien).

**Ikehara, Shikao:** On Kalmár's problem in „Factorisatio numerorum“. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 208—219 (1939).

Let  $k(n)$  be the number of representations of  $n$  ( $n > 1$ ) as a product of factors greater than one, order being relevant,  $k(1) = 1$ ,  $K(n) = \sum_{m=1}^n k(m)$ ,  $\varrho$  be the positive root of the equation  $\zeta(s) = 2$  and  $F(n) = n^{-\varrho} K(n) - \frac{1}{\varrho \zeta'(\varrho)}$ . Kalmar proved that

$F(n) = O((\log n)^{-\alpha \log \log \log n})$ , where  $\alpha$  is any number less than  $1:2(\varrho - 1) \log 2$ . The author uses a method due to Kienast (this Zbl. 18, 355) to prove that  $F(n) = O(e^{-q \log \log n})$ , where  $q$  is a positive number. This result is inferior to Kalmar's. *Wright*.

**Mardjanichvili, Constantin:** Estimation d'une somme arithmétique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 387—389 (1939).

Ist  $\tau_k(m)$  die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  von  $x_1 x_2 \dots x_k = m$ , so ist

$$T_k^{(l)}(n) = \sum_{1 \leq m \leq n} \tau_k^l(m) < A_k^{(l)} n (\log n + k^l - 1)^{k^l - 1}, \quad A_k^{(l)} = k^l / (k!)^{\frac{k^l - 1}{k-1}}.$$

$T_k^{(l)}$  wird direkt abgeschätzt und der Beweis für die allgemeine Behauptung mit vollständiger Induktion nach  $l$  geführt. Dabei wird die Ungleichung

$$T_k^{(l)}(n) < n \prod_{i=1}^l \sum_{1 \leq m_i \leq n} \frac{\tau_{k-1}^{l-i}(m_i) \tau_k^{l-i}(m_i)}{m_i}$$

benützt.

*Edmund Hlawka* (Wien).

**Segal, B.:** Approximation of complex numbers by a sum of powers of integers with a given complex exponent. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 147—173 u. engl. Zusammenfassung 173—184 (1939) [Russisch].

Es seien  $a > 1$ ,  $b \neq 0$  reelle Zahlen; dann gibt es zwei positive Zahlen  $r_0, \alpha$  (die in der Arbeit explizite angegeben sind) mit folgender Eigenschaft: es sei  $r$  ganz,  $r \geq r_0$ ; für beliebiges komplexes  $N$  sei  $J(N)$  die Anzahl der Darstellungen von  $N$  in der Gestalt

$$N = h_1 + h_2 i + \sum_{\lambda=1}^r x_\lambda^{a+b i},$$

$$x_\lambda \text{ ganz, } 0 < x_\lambda < |N|^{\frac{1}{a}}, \quad -|N|^{-\frac{\alpha}{a}} \leq h_i \leq |N|^{\frac{\alpha}{a}}; \quad (j=1, 2)$$

dann ist  $J(N) = L |N|^{\frac{r-2a-2\alpha}{a}} \left(1 + O\left(|N|^{-\frac{\alpha}{a}}\right)\right)$ . Dabei hängt  $L$  mit dem Inhalt des  $r$ -dimensionalen Gebietes

$$\left| \sum_{\lambda=1}^r \xi_\lambda^{a+b i} - N \right| < |N|^{1-\frac{\eta}{a}} \cdot (1 + o(1)), \quad 0 < \xi < |N|^{\frac{1}{a}}$$

zusammen (wo  $\eta$  nur von  $a$  abhängt,  $0 < \eta < a$ ) und ist größer als eine nur von  $a, b, r$  abhängige positive Zahl (also ist insbesondere  $J(N) > 0$  für große  $|N|$ ). — Verf. hat bereits früher dieses Ergebnis in etwas schwächerer Form angekündigt (dies. Zbl. 20, 7). — Das analoge Problem mit  $b = 0$  (und freilich mit nicht ganzem  $a > 1$  und reellem  $N$ ) hat Verf. in älteren Arbeiten behandelt (dies. Zbl. 8, 243; 9, 299; 12, 196).

*Jarník* (Praga).

**Koksma, J. F.:** Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen. Mh. Math. Phys. 48, 176—189 (1939).

Ein Polynom  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  heißt von der Höhe  $a$ , wenn alle  $|a_i| \leq a$  sind; eine algebraische Zahl  $\alpha$ , wenn ihre kanonische Gleichung  $f(\alpha) = 0$  ein solches  $f(x)$  enthält. — Während zur Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen  $\theta$

bei Mahler die Approximierbarkeit der 0 durch  $f(\theta)$  zugrunde gelegt wird, benutzt Koksma hier die Approximierbarkeit von  $\theta$  durch algebraische Zahlen  $\alpha$ . Bei festem  $\theta$  geht Mahler aus von  $\omega(n, a) = \min |f(\theta)|$ , K. von  $\omega^*(n, a) = \min |\theta - \alpha|$  für alle Polynome (algebr. Zahlen) des Grades  $n$  und der Höhe  $a$ ; beide Einteilungen ruhen dann parallel auf den Wachstumseigenschaften von  $1: \omega(n, a)$  bzw.  $1: a \omega^*(n, a)$ ; dafür werden erst bei  $a \rightarrow \infty$  die Wachstumsordnungen  $\omega(n)$ ,  $\omega^*(n)$  gebildet, dann bei  $n \rightarrow \infty$  die Wachstumstypen  $\omega = \overline{\lim} \frac{\omega(n)}{n}$ ,  $\omega^* = \overline{\lim} \frac{\omega^*(n)}{n}$  bzw. die „Indizes“  $\omega_1 = \overline{\lim} \frac{\omega(n)}{n}$ ,  $\omega_1^* = \overline{\lim} \frac{\omega^*(n)}{n}$ . — Die  $\omega(n, a)$  und  $\omega^*(n, a)$  können in Ungleichheitsbeziehungen eingespannt werden, die die Koksmaschen Klassen  $S^*$ ,  $T^*$ ,  $U^*$  als umfangsgleich mit den Mahlerschen  $S$ ,  $T$ ,  $U$  erweisen; besonders ist jede  $S^*$ -Zahl vom Index  $\omega_1^*$  auch  $S$ -Zahl mit  $\omega_1^* \leq \omega_1 \leq \omega_1^* + 2$ . — Fast alle Zahlen sind  $S$ -Zahlen; eine Beweisvereinfachung und ein Fortschritt gelingt in der Schätzung von  $\omega^*(n, a)$  nach unten, woraus (über Mahler hinaus) folgt, daß für fast alle reellen Zahlen schon  $\omega < 3$ , für fast alle komplexen  $\omega < \frac{3}{2}$  gilt. Auf dem Wege dazu gibt Verf. neben anderen auch für sich interessanten quantitativen Aussagen folgende Erweiterung eines Satzes von Kintchine: für ganz rationales  $m$  sei  $\varphi(m) > 0$  und  $\sum_1^\infty \varphi(m)$  konvergent; für fast alle  $\theta$  gestattet die Ungleichung

$$|\theta - \alpha| \leq \sqrt[\sigma]{\frac{\varphi(a)}{a^n}}, \quad \sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } \theta \text{ reell} \\ 2 & \text{für } \theta \text{ komplex} \end{cases}$$

höchstens endlich viele Lösungspaare  $(\alpha, a)$  mit algebraischem  $\alpha$  vom Grade  $n$  und der Höhe  $\leq a$ .  
Ullrich (Gießen).

## Gruppentheorie.

Hopkins, Charles: An extension of a theorem of Remak. Ann. of Math., II. s. 40, 636—638 (1939).

Verf. beweist, daß in einer Gruppe  $G$  mit Operatoren das Produkt  $S$  der minimalen zulässigen Normalteiler  $M$  direktes Produkt von endlich vielen unter ihnen ist, wenn nur vorausgesetzt wird, daß für die zulässigen Normalteiler von  $G$  die Minimalbedingung gilt. Die Faktoren sind bis auf zentrale Isomorphie eindeutig. Wird weiter vorausgesetzt, daß auch für die zulässigen Normalteiler eines  $M$  die Minimalbedingung gilt, so ist  $M$  direktes Produkt einfacher Gruppen. Diese Sätze sind Verallgemeinerungen von Sätzen Remaks. Die entsprechenden Verallgemeinerungen der Eindeutigkeitsätze von Remak gelten natürlich auch.

Deuring (Jena).

Miller, G. A.: Number of the subgroups of any given abelian group. Proc. nat. Acad. Sci., U. S. A. 25, 258—262 (1939).

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wieviel zyklische bzw. nichtzyklische Untergruppen eine gegebene abelsche Gruppe endlicher Ordnung enthält. Die erste Frage nach der Anzahl der zyklischen Untergruppen ist leicht durch eine explizite Formel zu beantworten. Die zweite Frage ist wesentlich komplizierter zu beantworten, und — von Spezialfällen abgesehen — wird nur allgemein ein Weg zur Bestimmung der betreffenden Anzahl beschrieben, aber keine explizite Formel angegeben. Die Formel für die Anzahl der Untergruppen einer Gruppe, die nur Elemente der Ordnung  $p$  enthält, ist offensichtlich fehlerhaft.

Ulm (Münster i. W.).

Miller, G. A.: Independent generators of the subgroups of an abelian group. Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 364—367 (1939).

Es handelt sich um die Aufstellung praktischer Kriterien für die Anzahl von Untergruppen gegebenen Typus in Abelschen Gruppen. Z. B.: In einer Abelschen Gruppe der Ordnung  $p^k$  mit  $k$  lauter gleichen Invarianten ist die Anzahl der Untergruppen mit  $\lambda$  lauter gleichen Invarianten  $p^\alpha$  gleich dem Produkt aus der Anzahl Untergruppen vom Typus  $1^\lambda$  in der Gruppe vom Typus  $1^k$  mal  $p^{\lambda(k-\lambda)(\alpha-1)}$ .

J. J. Burckhardt (Zürich).

**Miller, G. A.: Groups having a small number of subgroups.** Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 367—371 (1939).

Die endlichen Gruppen niedriger Ordnung werden hinsichtlich ihrer Untergruppen untersucht, und umgekehrt werden diejenigen Gruppen zusammengestellt, die eine vorgegebene Anzahl von Untergruppen haben für die Anzahlen zwei bis sieben.

*J. J. Burckhardt (Zürich).*

**Tehounikhin, S. A.: Über das Zentrum der Sylowuntergruppen der einfachen Gruppen.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 415—417 (1939).

Mittels eines früheren Satzes des Verf. (dies. Zbl. 12, 342) wird bewiesen: Die einfache Gruppe  $\mathcal{G}$  der Ordnung  $p^{\delta} \cdot n$  enthalte eine Abelsche Sylowuntergruppe  $\mathfrak{P}$  der Ordnung  $p^{\delta}$ . Sei  $\varrho$  die kleinste Zahl, für welche  $p^{\varrho} - 1$  und  $n$  einen gemeinsamen Teiler ungleich 1 haben. Dann ist die Anzahl von Elementen gleicher Ordnung in der fundamentalen Basis von  $\mathfrak{P}$  mindestens gleich  $\varrho$ , ferner enthält  $\mathfrak{P}$  nur solche Elemente, deren Ordnung  $\sqrt[p^{\delta}]{p^{\delta}}$  nicht übertrifft.

*J. J. Burckhardt (Zürich).*

**Wielandt, Helmut: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen.** Math. Z. 45, 209—244 (1939) u. Tübingen: Habilitationsschrift 1939.

Welche Eigenschaften haben die Untergruppen  $\mathfrak{A}$  einer Gruppe  $\mathcal{G}$ , die sich durch eine Normalkette  $\mathfrak{A} \triangleleft \mathfrak{A}_1 \cdots \triangleleft \mathfrak{A}_r = \mathcal{G}$  mit  $\mathcal{G}$  verbinden lassen? Verf. nennt diese Untergruppen *nachinvariant* und schreibt  $\mathfrak{A} \triangleleft \triangleleft \mathcal{G}$ . Diese Begriffsbildung erweist sich als sehr fruchtbar. Z. B. wird mit ihrer Hilfe am Schluß der Arbeit gezeigt, daß der Automorphismengruppenturm über einer endlichen Gruppe, deren Zentrum gleich  $e$  ist, stets nur endlich viele Glieder besitzt. — In Abschnitt II ergibt sich, daß (1) der Durchschnitt  $\mathfrak{D}$  und (2) das Erzeugnis  $\mathfrak{R}$  zweier nachinvarianten Untergruppen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  wieder nachinvariant sind, so daß die nachinvarianten Untergruppen einer Gruppe eine Oresche Struktur bilden. Die Kompositionsfaktoren von  $\mathcal{G}$  bis  $\mathfrak{D}$  sind, abgesehen von der Vielfachheit, dieselben wie die von  $\mathcal{G}$  bis  $\mathfrak{A}$  und von  $\mathcal{G}$  bis  $\mathfrak{B}$  zusammen. Die Kompositionsfaktoren von  $\mathfrak{R}$  sind, abgesehen von der Vielfachheit, dieselben wie die von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zusammengekommen. Bei dem etwas verwinkelten Beweise von (2) und der meisten weiteren Sätze wird vorausgesetzt, daß  $\mathcal{G}$  eine Kompositionsreihe von der Länge  $j(\mathcal{G})$  besitzt, und dann wird Induktion nach  $j(\mathcal{G})$  bzw. nach  $j(\mathcal{G}, \mathfrak{A}) = j(\mathcal{G}) - j(\mathfrak{A})$  angewendet. Naheliegende Abschwächungen jener Voraussetzungen, bei denen die Sätze noch gültig bleiben, werden jeweils vermerkt. — In III. wird gezeigt, daß jede Kette nachinvarianter Untergruppen ohne Wiederholungen, die sich nicht mehr verfeinern läßt, stets eine Kompositionsreihe ist und umgekehrt. Ferner wird ein Verfahren angegeben, zwei Kompositionsreihen zu verschmelzen (von oben oder von unten her). — In IV. werden Kriterien angegeben, wann zwei nachinvariante Untergruppen, die nur das Einheitsselement gemeinsam haben, elementweise vertauschbar sind. Das ist z. B. der Fall, wenn die Ordnung jedes zyklischen Kompositionsfaktors der einen Untergruppe teilerfremd ist zur Ordnung jedes zyklischen Kompositionsfaktors der anderen. — In V. werden die perfekten nachinvarianten Untergruppen einer gegebenen Gruppe eingehend untersucht. — In VI. werden die bis dahin gefundenen Sätze für Aussagen über beliebige Untergruppen nutzbar gemacht. — In VII. wird die nachinvariante Einbettung einer gegebenen endlichen Gruppe  $\mathfrak{A}$  in eine Gruppe  $\mathcal{G}$  untersucht. Wenn z. B. der Zentralisator von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathcal{G}$  gleich 1 ist, so ist  $\mathcal{G} : 1 \leq (\mathfrak{A} : 1)^{3\alpha_2^2}$ , wobei  $\alpha_2 = \log_2(\mathfrak{A} : 1)$  gesetzt ist. — VIII. Wenn das Zentrum einer Gruppe  $\mathfrak{A}$  gleich 1 ist, so läßt sich  $\mathfrak{A}$  als Normalteiler der Automorphismengruppe  $\mathfrak{A}_1$  von  $\mathfrak{A}$  auffassen, so daß der Zentralisator von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}_1$  gleich 1 ist, entsprechend die Gruppe  $\mathfrak{A}_1$  als Normalteiler ohne Zentralisator von ihrer Automorphismengruppe  $\mathfrak{A}_2$  usw. Es folgt, daß  $\mathfrak{A}$  nachinvariant und ohne Zentralisator in  $\mathfrak{A}_0$  eingebettet ist, also ist die Ordnung von  $\mathfrak{A}_0$  durch die Ordnung von  $\mathfrak{A}$  beschränkt und daraus folgt der eingangs erwähnte Satz über das Abbrechen des Automorphismengruppenturms über  $\mathfrak{A}$ .

*Zassenhaus (Hamburg).*

**Brauer, Richard: On the representation of groups of finite order.** Proc. nat. Acad. Sci. USA. 25, 290—295 (1939).

Diese Note enthält einen Bericht über die im Anschluß an die Arbeit von R. Brauer und C. Nesbitt (vgl. dies. Zbl. 18, 295) von Brauer gewonnenen Ergebnisse über modulare Darstellungen endlicher Gruppen. Als Anwendungen dieser Theorie wird erwähnt: I. Wenn eine irreduzible Matrizengruppe vom Grade  $n$  keinen Normalteiler von Primzahlordnung  $p$  besitzt und ihre Ordnung durch  $p$  genau in der ersten Potenz teilbar ist, dann ist  $p/2n + 1$  [Blichfeldt bewies:  $p/(2n + 1)(n - 1)$ ]. Wenn  $p = 2n + 1$ , so ist die Gruppe isomorph zu  $PSL(2, p)$ . II. Eine einfache Gruppe mit der Ordnung  $p \cdot q \cdot r^m$  ( $p, q, r$  verschiedene Primzahlen) hat die Ordnung 60 oder

168. III. Eine einfache Gruppe mit der Ordnung  $qp(1+np)$ , wobei  $q/p-1$ ,  $n < (2p+7)/3$  und die Elemente mit der Ordnung  $p$  nur mit ihren eigenen Potenzen vertauschbar sind, ist entweder zyklisch oder isomorph zur  $PSL(2, p)$  oder es ist  $p = 2^h \pm 1$  und die Gruppe isomorph zu  $PSL(2, 2^h)$ . Mit Hilfe der neuen Methoden lassen sich für viele Gruppen die Grade der irreduziblen Darstellungen explizit angeben. *Zassenhaus*.

**Dubuque, P.:** Sur les représentations monomiales et quelques critères pour qu'un groupe soit non-simple. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 2—6 (1939).

Vorbericht über 12 Sätze über echte Normalteiler, die mit Hilfe monomialer Darstellungen erhalten werden, unter ihnen Satz 9:  $A$  sei ein Element mit der Ordnung  $p^k$  ( $k < 0$ ,  $p$  ungrade Primzahl) in der endlichen Gruppe  $\mathcal{G}$ .  $A^{p^{k-1}}$  möge nicht zur Kommutatorgruppe der  $p$ -Sylowgruppe des Normalisators von  $A$  gehören; ferner möge jedes Element aus dem Normalisator des Elementes  $A^{p^{k-2}}$ , das zu einer Potenz  $A^z$  von  $A$  konjugiert ist, die Form  $A^{mz}$  haben, wobei  $m \equiv 1 \pmod{p}$  ist. Dann besitzt  $\mathcal{G}$  einen Normalteiler mit  $p$ -Potenzindex  $> 1$ . Wenn  $k \leq 2$ , so darf der Normalisator von  $A^{p^{k-2}}$  in den Bedingungen durch  $A^{p^{k-1}}$  ersetzt werden. Satz 10: Der Satz 9 gilt auch für  $p = 2$ , wenn in diesem Fall noch gefordert wird, daß  $A^{2^{k-2}}$  nicht zu seinem Inversen konjugiert ist. *Zassenhaus* (Hamburg).

**Zappa, Guido:** Sulla non-semplicità di alcuni gruppi d'ordine pari. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. **3**, 54—56 (1939).

L'Autore fondandosi sopra un teorema di Turkin (Math. Ann. **111**, 743—747; questo Zbl. **12**, 249) e facendo uso di un procedimento dimostrativo ispirato in parte a quello di cui si giova Grün in una sua memoria sulla teoria dei gruppi (J. reine angew. Math. **174**, 1—14; questo Zbl. **12**, 341), dimostra che se  $G$  è un gruppo d'ordine pari,  $P$  un suo sottogruppo abeliano massimo d'ordine  $2^*$  e tipo  $(1, 1, \dots, 1)$  e il centralizzante di  $P$  ha indice 2 nel normalizzante di  $P$ , allora  $G$  ammette un sottogruppo invariante d'indice pari. *M. Cipolla* (Palermo).

**Schulenberg, Elisabeth:** Die Erweiterungen der Grenzkreisgruppen mit zwei Erzeugenden. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **13**, 144—199 (1939).

Siehe dies. Zbl. **18**, 63. Verf. erledigt das von Petersson aufgestellte Problem der Erweiterung von Grenzkreisgruppen für alle Gruppen mit 2 Erzeugenden (die nach Zassenhaus als kanonische Erzeugende gewählt werden können; dies. Zbl. **17**, 306), indem sie alle Erweiterungen angibt, tabellarisch zusammenstellt, Erzeugende und def. Relationen aufstellt und mit Zeichnungen zeigt, wie sich der kanonische Fundamentalbereich der Gruppe aus den kan. F.B. der Erweiterung aufbaut. Methode: Mit Hilfe der bereits von Petersson verwendeten und einiger ähnlicher Formeln wird festgestellt, welche Ordnungen die Ecken einer vielleicht existierenden Erweiterung haben müßten. Sodann wird entweder die Unmöglichkeit der Erweiterung gezeigt oder es werden mit Hilfe des Reidemeisterverfahrens aus den in kanonischer Form angenommenen Erzeugenden und def. Relationen der Erweiterung die Erz. und def. Rel. der Untergruppe bestimmt, woraus dann die Existenz der Untergruppe und ihrer Erweiterung erschlossen wird. *Lochs* (Kennelbach).

**Ore, Oystein:** Contributions to the theory of groups of finite order. Duke math. J. **5**, 431—460 (1939).

Die Strukturtheorie [s. O. Ore, Structures and group theory I a. II. Duke math. J. **3**, 149—174 (1937); **4**, 247—269 (1938); dies. Zbl. **16**, 351 u. **20**, 348] wird auf vielerlei Fragen der Gruppentheorie angewendet. Hier soll nur eine Auswahl der zahlreichen Sätze angeführt werden. Kapitel I, Satz 2: Wenn  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  vertauschbare Untergruppen einer Gruppe  $\mathcal{G}$  sind, so existiert ein starker Strukturisomorphismus zwischen der Quotientenstruktur  $\mathcal{A}\mathcal{B}/\mathcal{A}$  und derjenigen Teilstruktur von  $\mathcal{B}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ , die aus allen mit  $\mathcal{A}$  vertauschbaren Untergruppen gebildet wird. Ferner ist dann nach Satz 3 jede in  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  Konjugierte von  $\mathcal{A}$  mit jeder in  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  Konjugierten von  $\mathcal{B}$  vertauschbar. Satz 5: Wenn alle die maximalen Untergruppen einer Gruppe paarweise vertauschbar sind, so sind sie normal. Nach II Satz 1 haben endliche Gruppen genau dann diese Eigenschaft, wenn sie normal sind. — Weiter wird der Begriff der permutierbaren Aufspaltung einer Gruppe  $\mathcal{G}$  in zwei echte Untergruppen  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , die dann permutierbar in  $\mathcal{G}$  enthalten heißen, definiert durch die Eigenschaften:  $\mathcal{G} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ . Das findet z. B.

nach Satz 8 dann statt, wenn die Indizes von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{G}$  endlich und zueinander teilerfremd sind. Wenn bei permutierbarer Aufspaltung  $\mathfrak{B}$  abelsch und  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \neq e$ , so enthält  $\mathfrak{A}$  einen von  $e$  verschiedenen Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ . — Satz 16: Jede maximale, quasynormale (d. h. mit jeder Untergruppe vertauschbare) Untergruppe ist normal. — Kap. II. Auf Grund der Sätze über Durchschnittsaufspaltungen in Ore II (s. oben) wird der Satz von Powsner (Über eine Substitutionsgruppe kleinsten Grades, die einer gegebenen Abelschen Gruppe isomorph ist; dies. Zbl. 19, 155—156), daß der kleinstmögliche Grad einer treuen Darstellung einer endlichen Abelschen Gruppe gleich der Summe ihrer Invarianten ist, einfach hergeleitet. Als genaue Bedingung dafür, daß die  $\Phi$ -Gruppe einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  gleich  $e$  ist, ergibt sich nach Satz 9, daß für jede Primzahl  $p$  der Durchschnitt aller  $p$ -Sylowgruppen abelsch vom Exponenten  $p$  ist und daß die Erweiterung  $\mathfrak{G}$  über diesem Durchschnitt zerfällt (= Existenz einer Untergruppe, die ein Vertretersystem bildet). — Kap. III, Satz 2: Wenn eine gegebene Kette von Untergruppen einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  komplett ist, d. h. daß die Kette mit  $\mathfrak{G}$  beginnt und mit  $e$  aufhört, und sich nirgends eine echte Zwischengruppe einschalten läßt, dann läßt sich jede Hauptreihe von  $\mathfrak{G}$  durch Einschaltung von Zwischengruppen explizit so verfeinern, daß nach Streichung der Wiederholungen eine zur gegebenen Kette konforme entsteht, d. i. eine Kette von Untergruppen, in der die sukzessiven Indizes bis auf die Reihenfolge mit denen der gegebenen Kette übereinstimmen. Satz 6: Hatte die gegebene Kette sogar maximale Länge, so gilt Satz 2 auch für Kompositionsreihen an Stelle der Hauptreihen von  $\mathfrak{G}$ . — Kap. IV. In Satz 10 wird als genaue Bedingung dafür, daß eine endliche Gruppe auflösbar ist, erhalten, daß jede Untergruppe einer kompletten Kette normal oder permutierbar in der vorangehenden enthalten ist. Entsprechend ist nach Satz 11 eine endliche Gruppe nilpotent genau dann, wenn jede komplette Kette eine Kompositionsreihe ist. — Als normal nilpotente Kette einer auflösbaren Gruppe  $\mathfrak{G}$  wird eine Kette von Normalteilern von  $\mathfrak{G}$ , die mit  $\mathfrak{G}$  beginnt und mit  $e$  aufhört und in der die sukzessiven Faktorgruppen nilpotent sind, bezeichnet. Die aufsteigende nilpotente Reihe  $\mathfrak{G} = \cdots \mathfrak{M}_{h+1} = \mathfrak{M}_h \supset \mathfrak{M}_{h-1} \cdots \supset \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_{-1} = \cdots = e$  wird durch die Vorschrift erhalten, daß  $\mathfrak{M}_0 = e$  und für  $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_{i-1}$  der inaximal nilpotente Normalteiler von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}_{i-1}$  genommen werden soll. Die absteigende nilpotente Reihe  $\mathfrak{G} = \cdots \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \cdots \supset \mathfrak{M}_h \supset \mathfrak{M}_{h+1} = \mathfrak{M}_{h+2} \cdots = e$  wird dual zur aufsteigenden definiert. Die Länge dieser beiden Reihen ist gleich und für jede normalnilpotente Kette  $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \cdots \supset \mathfrak{M}_r = e$  gilt, daß  $\mathfrak{M}_{h+1-i} \supset \mathfrak{M}_i \supset \mathfrak{M}_i$ . — Kap. V. Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  heißt dispersibel, wenn eine Normalkette  $e = \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_1 \cdots \subset \mathfrak{R}_r = \mathfrak{G}$  existiert, so daß  $\mathfrak{R}_i : \mathfrak{R}_{i-1} = p_i^{x_i}$  und für die Primzahlen  $p_i$  gilt, daß  $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ . Die normalen dispersiblen Untergruppen jeder Gruppe bilden eine Teilstruktur (auf S. 455 3. Abs. fehlt der Zusatz normal); deren Faktorgruppen sind ebenfalls dispersibel. In jeder endlichen auflösbaren Gruppe läßt sich eine aufsteigende und eine absteigende dispersible Reihe bilden. Unter allen Ketten aus Normalteilern mit lauter dispersiblen sukzessiven Faktorgruppen haben sie die kürzeste Länge. Nach Satz 1 ist eine Gruppe genau dann dispersibel, wenn es eine komplette Kette gibt, in der die sukzessiven Indizes Primzahlen sind und von oben nach unten niemals abnehmen. Nach Satz 5 sind endliche Gruppen, deren komplette Untergruppenketten paarweise konform sind, auflösbar. Nach Satz 7 gestatten diese Gruppen mit konformen Ketten jede Permutation der sukzessiven Indizes in den kompletten Ketten; sie sind daher nach Satz 1 dispersibel. Nach Satz 10 sind sie dadurch gekennzeichnet, daß ihre Hauptreihe primzahlstufig ist. Ihre Kommutatorgruppe ist nilpotent. Falls für je zwei Primteiler der Gruppenordnung stets  $p \equiv 1 \pmod{q}$  gilt, so ist die ganze Gruppe nilpotent. — Satz 13: Eine endliche Gruppe, in der die Ordnungen der Untergruppen jeden Teiler der Gruppenordnung annehmen, sind dispersibel. Satz 14: Eine Gruppe, in der jede Untergruppe und jede Faktorgruppe Untergruppen jeder möglichen Ordnung besitzt, ist eine Gruppe mit konformen Ketten und umgekehrt.

Hans Zassenhaus (Hamburg).

Ward, Morgan, and R. P. Dilworth: The lattice theory of ova. Ann. of Math., II. s. 40, 600—608 (1939).

In der Arbeit wird der als Ovum (commutative groupoid, semi-group) bezeichnete algebraische Bereich auf verbandstheoretischer Grundlage untersucht. Damit wird der Theorie der Verbände ein neues und interessantes Anwendungsgebiet erschlossen. Unter den Teilbereichen eines Ovums spielen die Produktideale und Ovoidideale eine besondere Rolle. Hinsichtlich der ersteren wird der dem Hauptsatz der klassischen Idealtheorie in gewisser Weise entsprechende Fundamentalsatz der Arithmetik endlicher Ova bewiesen. Hinsichtlich der an zweiter Stelle genannten Ideale wird gezeigt, daß die Menge aller Ovoidideale eines Ovums ein vollständig geschlossener  $R$ -Verband (residuated lattice) ist, woraus insbesondere folgt, daß die Haupt-Ovoidideale ein mit dem Ausgangsovum isomorphes Ovum bilden. Genügt der Verband der Ovoidideale überdies dem distributiven Gesetz und einer gewissen Kettenbedingung, so ist ein dem

obigen analoger Fundamentalsatz in Kraft. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf arithmetische und semi-arithmetische Verbände. *F. Klein-Barmen* (Wuppertal).

**Birkhoff, Garrett, and Morgan Ward:** A characterization of Boolean algebras. *Ann. of Math.*, II. s. 40, 609—610 (1939).

Ein Verband wird als eine Boolesche Algebra bezeichnet, wenn neben dem distributiven Gesetz das Axiom der Komplementärelemente in Kraft ist. In der Note wird das zwischen diesen beiden Bedingungen bestehende Abhängigkeitsverhältnis untersucht, und zwar wird vermitteltst einer Isomorphiebetrachtung folgendes gezeigt: Ein atomistischer  $C$ -Verband (complete atomistic lattice) ist dann und nur dann eine Boolesche Algebra, wenn zu jedem Element genau ein Komplementärelement gehört.

*F. Klein-Barmen* (Wuppertal).

## Analysis.

### Allgemeines:

**Knopp, Konrad:** Darstellung der reellen Zahlen durch Grenzprozesse. *Enzyklopädie d. math. Wiss.* 1, Tl 1, H. 2, 30 S. (1939).

Übersicht über einige Grundbegriffe der Analysis soweit sie auch im algebraisch-zahlentheoretischen Teil der Enzyklopädie benötigt werden; die Auswahl ist durch dieses Ziel bestimmt:  $\varepsilon$ , Exhaustionsmethode, Grenz- und Häufungswert, Grenze, Schranke,  $g$ -adische (System-) Brüche. Unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche, jeweils mit einfachsten Konvergenzkriterien; Anwendung für besondere Darstellungstypen reeller Zahlen: Reihen (bzw. Produkte) nach Cantor, Lüroth, Engel. Kurzer Überblick über die Güte der Annäherung besonders im Zusammenhang mit (regelmäßigen) Kettenbruchdarstellungen und über Irrationalitätsbeweise; knappe historische Hinweise, sowie Hinweise auf einschlägige historische Untersuchungen. Diophantische Approximationen und Transzendenzfragen bleiben außerhalb des Rahmens (s. a. dies. Zbl. 21, 205, Bachmann).

*Ullrich* (Gießen).

**Goormaghtigh, R.:** Sur la formule générale d'addition des tangentes. *Mathesis* 53, 149—151 (1939).

Sur la formule  $\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m) = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + \dots + (-1)^{p-1} \varphi_{m-1}}{1 - \varphi_2 + \varphi_4 - \dots + (-1)^p \varphi_m}$ ,  $m = 2p$ , et une formule analogue pour  $m = 2p - 1$ ;  $\varphi_1 = \sum \operatorname{tg} \theta_1$ ,  $\varphi_2 = \sum \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2$ , etc.

*O. Bottema* (Deventer [Niederlande]).

**Grünwald, Tibor:** Über Polynome mit reellen Nullstellen. *Mat. fiz. Lap.* 46, 31—55 u. dtsh. Zusammenfassung 56—57 (1939) [Ungarisch].

Verf. beweist drei Ungleichungen über Integrale von Polynomen mit lauter reellen Nullstellen und folgert daraus die Sätze: Ist  $f(x)$  ein Polynom  $n(>2)$ -ten Grades mit folgenden Eigenschaften: 1.  $f'(x)$  hat lauter reelle Nullstellen  $y_1 > y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_{n-1}$ , 2.  $f(x)$  hat im Intervall  $y_1 < x \leq y_2$  eine Nullstelle  $x_2$ , so besteht die genaue Ungleichung  $x_1 - y_1 \leq y_1 - z_1$ , wo  $x_1$  bzw.  $z_1$  die größte Nullstelle von  $f(x)$  bzw.  $f''(x)$  bezeichnet. [Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von I. Schur, *J. reine angew. Math.* 144, 75 (1914).] Es seien  $p$  und  $q$  ( $p < q$ ) zwei aufeinanderfolgende Nullstellen des Polynoms  $f(x)$   $n$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten; hat die Derivierte  $f'(x)$  lauter reelle Nullstellen, so können die im Intervall  $(p, q)$  liegenden sämtlichen Nullstellen von  $f'(x)$  im Innern keines der Intervalle  $\left(p, p + \frac{q-p}{n}\right)$  und  $\left(q - \frac{q-p}{n}, q\right)$  liegen. (Durch diesen Satz wird ein bekannter Laguerrescher Satz verschärft.) — Hat die Derivierte des Polynoms  $f(x)$  mit reellen Koeffizienten lauter reelle Nullstellen, sind  $P_1$  und  $P_2$  zwei auf der Kurve  $y = f(x)$  aufeinanderfolgende Punkte, deren Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  zu der  $x$ -Achse parallel sind, und teilt man den Parallelsreifen zwischen  $t_1$  und  $t_2$  in vier gleiche Streifen, so fällt der zwischen  $P_1$  und  $P_2$  liegende Wendepunkt der Kurve in keinen der äußersten Teilstreifen.

*Gy. v. Sz. Nagy* (Szeged).

**Geniusz-Mikusiński, Jan:** Sur les zéros des polynômes et de leurs dérivées successives. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1966—1967 (1939).

Es seien  $n + 2$  positive Zahlen  $r_0, r_1, \dots, r_n, m$  gegeben, die den Relationen  $r_{k-1} \leq r_k + 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) und  $m = r_n + n$  genügen. Verf. skizziert ein Verfahren für die Darstellung eines Polynoms  $f(x)$   $m$ -ten Grades, dessen  $k$ -te Derivierte  $f^{(k)}(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) [ $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$ ] im offenen Intervall  $(a, b)$  genau  $r_k$  einfache Nullstellen hat. Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

**Misra, Narayan:** A formula for the  $n$ th differential coefficient of a composite function. Bull. Calcutta Math. Soc. 31, 5—16 (1939).

Mittels gewisser Operatoren wird für die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $f(x, x_1, x_2, \dots, x_m)$ , wo  $x_1, x_2, \dots, x_m$  Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $x$  sind, eine allgemeine Formel abgeleitet; die Koeffizienten erscheinen als Invarianten für die Differentiationen höherer Ordnung. Volk (Würzburg).

**Gorny, Azyk:** Sur les maxima des dérivées successives d'une fonction. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1864—1865 (1939).

Se  $f(x)$  ha tutte le derivate, e queste sono limitate sull'asse reale, esistono dei numeri  $A_n$ , tali che la successione  $\log A_n$  sia convessa e che  $A_n \leq \max |f^{(n)}(x)| \leq c^n A_n$ , con  $c$  costante indipendente da  $f(x)$ . Questo risultato, implicitamente contenuto in un lavoro dell'A. [C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1245—1247 (1938); questo Zbl. 18, 300; cfr. Kolmogoroff, ibidem 207, 764—765 (1938); questo Zbl. 19, 314], è qui invertito nel senso che, prefissate le  $A_n$  in modo che  $\log A_n$  sia convesso, esiste una funzione  $f(x)$  indefinitamente derivabile su tutto l'asse reale ed ivi soddisfacente alle  $A_n \leq \max |f^{(n)}(x)| \leq 20^{n+1} A_n$ , per ogni  $n > 0$ , od anche alle  $A_n \leq \max |f^{(n)}(x)| \leq c(\varepsilon) (1 + \varepsilon)^n A_n$  con  $\varepsilon > 0$ . Questo risultato si presta allo studio delle classi di funzioni indefinitamente derivabili. G. Scorza Dragoni (Padova).

**Sz. Nagy, Béla de:** Sur un problème d'extremum pour les fonctions définies sur tout l'axe réel. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1865—1867 (1939).

Sia  $f(x)$  continua su tutto l'asse reale e si ponga

$$J_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \quad \text{ed} \quad M_n(f) = \max_{x, h} \left| h^{-n} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu f(x + h\nu) \right|$$

per  $n = 1, 2, \dots, p \geq 1$ . Sia  $F_n$  la sottoclasse delle  $f(x)$  per cui  $f(0) = 1$ ,  $M_n(f) \leq 1$ . Fissati  $n$  e  $p$ , in  $F_n$  l'integrale  $J_p(f)$  è dotato di minimo,  $k_{n,p}$ , ed esiste ivi una ed una sola funzione minimizzante,  $\varphi_{n,p}(x)$ , che è un integrale indefinito  $n$  volte iterato di una funzione assumente

solo i valori 1, -1, 0. — Riesce  $k_{n,p} \geq \frac{2}{p+1} \frac{c_i^{(n-1)/n}}{c_{n-1}}$ , dove  $c_i = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \right)^{i+1}$ . Inoltre

$k_{n,p}$  è il massimo valore consentito alla costante  $c$  se si vuole che sia  $M_n(f) \leq c^n [J_p(f)]^{-n}$  per tutte le  $f(x)$  per cui  $f(0) = 1$ . — Se  $n = 1$  è  $\varphi_{1,p}(x) = 1 - |x|$  in  $(-1, 1)$ ,  $\varphi_{1,p}(x) = 0$  altrove e  $k_{1,p} = \frac{2}{p+1}$ . L'A. tratta anche il caso  $n = 2$ . G. Scorza Dragoni (Padova).

**Corput, J. G. van der:** Sur la méthode des points décisifs. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42, 468—475 (1939).

Es handelt sich darum, Näherungswerte für Integrale der Gestalt

$$J = \int g(w) e^{f(w)} dw \quad (1)$$

anzugeben, wo  $C$  ein stetiger, rektifizierbarer Kurvenbogen in der komplexen  $w$ -Ebene ist. Dabei wird folgendes vorausgesetzt:  $g(w)$  hat längs  $C$  eine stetige Ableitung  $g'(w)$  [definiert als Grenzwert von  $(g(z) - g(w))/(z - w)$ ], wenn  $z$  längs  $C$  gegen  $w$  strebt; ebenso sei  $f'''(w)$  stetig längs  $C$ ; man fixiere irgendwie  $(f''(w))^{1/2}$  als eine stetige Funktion. Auf  $C$  sei nie  $f'(w) (f''(w))^{-1/2}$  eine reelle Zahl  $\neq 0$ ; es gebe auf  $C$  höchstens endlichviele Punkte  $\zeta$  mit  $f'(\zeta) = 0$ , und in keinem solchen Punkte sei  $f''(\zeta) \geq 0$ . Die „points décisifs“ seien diejenigen Punkte  $\zeta$  von  $C$  (mit Ausschluß der Endpunkte) mit  $f'(\zeta) = 0$ , in deren Umgebung  $\Im(f'(w) (f''(w))^{-1/2})$  sein Vorzeichen ändert. — Verf. setzt (für jedes  $w$  von  $C$ , welches kein „point décisif“ ist)  $\psi_0(w) = e^{f(w)}$ ,

$$\psi_\sigma(w) = \frac{1}{(\sigma-1)!} \int_w^\infty (z-w)^{\sigma-1} \exp(f(w) + f'(w)(z-w) + \frac{1}{2} f''(w)(z-w)^2) dw \quad (\sigma = 1, 2, \dots),$$

wo längs eines geeigneten Hyperbelbogens integriert wird; nähert sich  $w$  einem „point décisif“, so besitzt  $\psi_\sigma(w)$  zwei verschiedene einseitige Grenzwerte, die sich elementar berechnen lassen. Es ist

$$\psi_\sigma(w) = -\psi'_{\sigma+1}(w) + \frac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2)f''(w)\psi_{\sigma+3}(w);$$

eine partielle Integration liefert also

$$\int_C g(w)\psi_\sigma(w)dw = A + \int_C g' \psi_{\sigma+1} dw + \frac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+2) \int_C f''' \psi_{\sigma+3} dw, \quad (2)$$

wo  $A$  den Beitrag der Endpunkte von  $C$  und der „points décisifs“ bedeutet. Für  $\sigma=0$  gibt (2) eine Darstellung von  $J$ ; ist  $g, f$  noch weiter differentierbar, so bekommt man durch wiederholte Anwendung von (2) eine Darstellung von  $J$  als Summe eines elementaren Ausdruckes und einiger Integrale der Gestalt  $\int_C \chi(w) \psi_\tau(w) dw$ , die sich mit Hilfe der Ungleichung

$$|\psi_\sigma(w)| < \text{Min} \left( \frac{2^{\sigma+\frac{1}{2}}}{|f'(w)|^\sigma} |e^{f(w)}|, \frac{2^{\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{(\sigma-1)! |f''(w)|^{\frac{1}{2}\sigma}} |e^{f(w)}| \right) \quad (\sigma = 1, 2, \dots)$$

abschätzen lassen. — Vgl. auch die Arbeit des Verf.: Zur Methode der stationären Phase. II. Mitt. *Compositio Math.* 3, 328—372 (1936); dies. Zbl. 15, 11. *Jarník*.

**Boas jr., R. P.:** Remarks on a theorem of B. Lewitan. *Rec. math. Moscou*, N. s. 5, 185—187 (1939).

Im Zusammenhang mit einem Satz von S. Bernstein [nach welchem (I) aus (II) folgt] beschäftigt sich Verf. mit dem Lewitanschen Satze (dies. Zbl. 16, 298): Sei  $f(x)$  stetig und beschränkt in  $(-\infty, \infty)$  und

$$2\pi\varphi(x) = \int_{-1}^{+1} f(t) \frac{e^{-ixt} - 1 + ixt}{-t^2} dt + \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} f(t) \frac{e^{-ixt}}{-t^2} dt$$

gesetzt,  $\varphi''(x) = 0$  für  $|x| > A$ , dann ist (I)  $|f'(x)| \leq A \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|$ . Er zeigt [ohne  $f(x)$  stetig vorauszusetzen], daß (I) ersetzt werden kann durch (II) „ $f(x)$  ganz und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(x)|^{1/n} \leq A$  für ein, also für jedes  $x''$ , und daß (II) auch hinreichend ist, damit  $\varphi''(x) = 0$  für  $|x| > A$  sei. *J. Karamata*. (Beograd).

**Sibirani, Filippo:** Una proposizione insussistente. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 1, 229 (1939).

Beispiel dafür, daß  $f(x, y) \cdot g(x, y) = a(x) \cdot b(y)$  sein kann, ohne daß  $f$  oder  $g$  in das Produkt zweier Funktionen von  $x$  bzw.  $y$  allein zerlegbar sind. *Harald Geppert*.

**Scardina, Mariano:** Alcune proposizioni sulle dizuguaglianze. *Riv. Fis. Mat. e Sci. Nat.* 13, 516—520 (1939).

Es handelt sich um elementare Bemerkungen über das Potenzieren und Radizieren bei Ungleichungen. *Ullrich* (Gießen).

**Cioraneseu, Nicolas:** La généralisation de la première formule de la moyenne. *Enseignement Math.* 37, 292—302 (1938).

Partendo dalla prima formula della media, l'A. arriva alla formula:

$$\int_a^b p(x) P_n(x) f(x) dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \dots \int_a^b V_{n+1}^2 p(x_0) \dots p(x_n) dv_{n+1} \quad a < \xi < b, \quad (M)$$

dove  $f(x)$  è una funzione di variabile reale in  $(a, b)$ , ammettente derivata finita di ordine  $n$ ,  $p(x)$  è non negativa in  $(a, b)$ , ed è:  $V_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \|1, x_k, x_k^2, \dots, x_k^n\|$ , mentre i polinomi

$$P_n(x) = \int_a^b \dots \int_a^b V_n^2(x_1, \dots, x_n) p(x_1) \dots p(x_n) (x - x_1) \dots (x - x_n) dx_1 \dots dx_n$$

sono i polinomi di Tschebyscheff relativi al peso  $p(x)$  e all'intervallo  $(a, b)$ . Alla (M), l'A. dà poi la forma:

$$\int_a^b p(x) P_n(x) f(x) dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b p(x) P_n(x) x^n dx, \quad a < \xi < b. \quad (M')$$

Dalle formule (M) ed (M'), l'A. riceva poi interessanti applicazioni e generalizzazioni.  
L. Beretta (Firenze).

**Chow, Y. C.:** A note on Hardy's inequality and similar inequalities. J. London Math. Soc. 14, 88—93 (1939).

Sei  $k > 1$  und  $k' = k/k - 1$ . Die Hardysche Ungleichung

$$\sum_1^\infty \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^k < k'^k \sum_1^\infty a_n^k, \quad a_n \geq 0$$

wird in mehreren Richtungen verallgemeinert, welche sich durch folgenden Satz zusammenfassen lassen: I. Sei  $\lambda_n \geq 0$ ,  $\alpha = 0$  für  $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$  und  $=1$  sonst,  $\beta = 0$  für  $\lambda_n < \lambda_{n-1}$  und  $=1$  sonst,  $A_n = \frac{\lambda_1^\beta a_1 + \lambda_2^\beta a_2 + \dots + \lambda_n^\beta a_n}{\lambda_1^\beta + \lambda_2^\beta + \dots + \lambda_n^\beta}$  und die Funktion  $f^{1/k}(x)$  positiv, konvex und im Falle  $\lambda_n \equiv 1$  stetig. Dann ist

$$\sum_1^\infty \lambda_n^\alpha / (A_n) \leq k' \sum_1^\infty \lambda_n^\alpha f^{1/k}(a_n) f^{1/k'}(A_n) \leq k'^k \sum_1^\infty \lambda_n^\alpha / (a_n).$$

Außerdem wird noch bewiesen: II. Die Folgen  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ , ... seien positiv, nicht abnehmend und  $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ ,  $B_n = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$ , ... Dann ist  $\sum_1^\infty (A_n B_n \dots)^k \leq k'^k \sum_1^\infty (a_n b_n \dots)^k$ , außer wenn  $(a b \dots)$  gleich Null ist.

V. G. Avakumović (Beograd).

**Chow, Y. C.:** On inequalities of Hilbert and Widder. J. London Math. Soc. 14, 151—154 (1939).

Als Verallgemeinerung der D. V. Widderschen Ungleichung [J. London Math. Soc. 4, 194 (1924)] beweist Verf.: Sei  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ ,  $p > 1$ ,  $p' = p/p - 1$ ,

$\alpha(x) = e^{-x} \sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!}$  und  $\beta(x) = e^{-x} \sum_0^\infty b_n \frac{x^n}{n!}$ . Dann ist

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_m b_n}{m+n+1} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left( \int_0^\infty \alpha^p dx \right)^{1/p} \left( \int_0^\infty \beta^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

Betreffs des Verhältnisses der Widderschen und Hilbertschen Abschätzung wird allgemein bewiesen: Es ist

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \dots \sum_0^\infty \frac{a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_m}}{m n_1 + n_2 + \dots + n_m + 1} \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \leq \prod_{i=1}^m \left( \sum a_{n_i}^{p_i} \right)^{1/p_i},$$

vorausgesetzt, daß  $a_{n_i}$  positiv,  $p_i > 1$  und  $\sum_1^m \frac{1}{p_i} = 1$  ist.

V. G. Avakumović.

**Young, L. C.:** On an inequality of Marcel Riesz. Ann. of Math., II. s. 40, 567 bis 574 (1939).

A new proof of the following equivalent of a theorem of M. Riesz [cf. Acta math. 49, 465—497 (1927)]: Let  $x$  denote a  $2N$ -dimensional vector with the components

$x_1, x_2, \dots, x_{2N}$  and let be  $F_\alpha(x) = \left[ \sum_{h=1}^N |x_{2h-1} + i x_{2h}|^\alpha \right]^{1/\alpha}$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ),  $F_0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(x)$ ;  $F_\beta^*(x) = F_\beta(Ax)$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), where  $A$  is a square  $2N$ -dimensional matrix. Then  $\log \max_x (F_\beta^*(x)/F_\alpha(x))$  is a convex function of  $\alpha, \beta$  in the triangle  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ . —

The proof is based on elementary lemmas on  $F_\alpha(x)$  and on the following general inequality: Let  $F(x)$  and  $\Phi(x)$  be the functions of distance of the convex bodies  $C$  and  $K$  containing the origin,  $\Phi$  being supposed differentiable with respect to the components of the  $n$ -dimensional vector  $x$ . Let us define  $f(x) = \Phi(x) \cdot \left[ G \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right]^k$  where  $k$  is a positive number and  $G(y)$  is the „Stützfunktion“ of  $C$ . Let  $F^*(x)$ ,  $\Phi^*(x)$  and  $f^*(x)$  be the analogous functions corresponding to an other couple  $C^*$ ,  $K^*$  of convex bodies containing the origin. Then we have  $\max (f^*/f) [\max (F^*/F)]^k \geq [\max (\Phi^*/\Phi)]^{1+k}$ .

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

**Petrowsky, I. G., et K. N. Smirnof:** Sur une condition suffisante pour qu'une famille de fonctions soit également continue. Bull. Univ. État. Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. 1, Fasc. 10, 1—15 (1938).

Bei gegebenem ganzzahligem  $s$  bezeichne  $G_s$  die Menge der Gitterpunkte  $x_\nu = 2^{-s} L \cdot f$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ;  $f = 0, 1, \dots, 2^s$  im Würfel ( $0 \leq x_\nu \leq L$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ ). Eine Funktionenfolge  $u_1, u_2, \dots$ , wobei  $u_s(P)$  auf  $G_s$  definiert ist, heiße gleichgradig stetig, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\eta = \eta(\varepsilon)$  und  $s_0 = s_0(\varepsilon)$  gehört derart, daß  $|u_s(P_1) - u_s(P_2)| < \varepsilon$  für  $\|P_1, P_2\| < \eta$ ,  $s > s_0$ ,  $P_1 \in G_s$ ,  $P_2 \in G_s$ . Ferner bezeichne  $F(x)$  eine reelle Funktion des reellen  $x$ , welche 1. für alle  $x$  erklärt und mit stetiger Ableitung versehen ist; 2.  $F(x) = F(-x) \geq 0$  genügt; 3. für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $+\infty$  strebt; 4. nach unten konvexes

$\Phi(x) = |x| F(x)$  liefert, wobei 5. gilt  $\int_a^\infty \Phi^{-1} dx < \infty$  mit  $a > 0$ . — Eine nur 1.—4. genügende Funktion werde mit  $F_0(P)$  bezeichnet. — Mit  $[\Delta x_{i_1}, \dots, \Delta x_{i_l}](u_s) = \frac{\Delta_{i_1 \dots i_l}^l u_s}{\Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_l}}$

seien in leichtverstndlicher Weise die partiellen Differenzenquotienten von  $u_s$  auf  $G_s$  bezeichnet. Falls einer der bei der Differenzenbildung beteiligten Punkte nicht in  $G_s$  liegt, soll der Differenzenquotient gleich Null gesetzt werden. — Es wird nun folgender Satz bewiesen: Vor. Es existiere eine absolute Konstante  $M$  derart, daß für alle  $s$  gilt

$$\sum_{G_s} |[\Delta x_{i_1}, \dots, \Delta x_{i_l}](u_s)| F_0([\Delta x_{i_1}, \dots, \Delta x_{i_l}](u_s)) \Delta x_1 \dots \Delta x_n \leq M,$$

$$\sum_{G_s} |[\Delta x_{i_1}, \dots, \Delta x_{i_m}](u_s)|^{\frac{n}{m}} (F([\Delta x_{i_1}, \dots, \Delta x_{i_m}](u_s)))^{\frac{n}{m}} \Delta x_1 \dots \Delta x_n \leq M$$

für ganzes  $m$  mit  $0 < l < m \leq n$ ,  $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = 2^{-s} L$ . Summiert wird über alle Gitterwrfel der Kantenlänge  $2^{-s} L$  bzw. ber diejenigen ihrer Ecken, welche die kleinsten Koordinaten besitzen.  $F$  und  $F_0$  können verschieden sein. Die Ungleichungen sollen gelten für alle (zulässigen) Systeme verschiedener  $i_1, \dots, i_l$  bzw.  $i_m$ . Beh. Die  $u_s(P)$  sind gleichgradig stetig. Das Kriterium ist, wie in der Einleitung hervorgehoben wird, wichtig für Existenzbeweise bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen. Der Beweis liefert zugleich einen Beweis für ein analoges differentielles (d. h. mit Ableitungen und Integralen arbeitendes) Kriterium, welches sich ein wenig von demjenigen von Soboleff (vgl. C. R. Acad. Sci. URSS 1 (X), Nr 7 (24), 279 (1936); dies. Zbl. 14, 57) unterscheidet. Am Schlusse Bemerkungen über mögliche Abänderung der Voraussetzungen.

Haupt.

## Reihen:

**Chand, Hukam:** On some generalizations of Cauchy's condensation and integral tests. Amer. Math. Monthly 46, 338—341 (1939).

Ist  $\Phi(x)$  eine positive, eindeutige Funktion, welche monoton gegen Null abnimmt, wenn  $x$  gegen  $\infty$  wächst, und ist  $a$  eine Zahl  $> 1$ , dann sind die Reihen  $\sum_{n=1}^\infty \Phi(n)$  und  $\sum_{n=1}^\infty a^n \Phi(a^n)$  gleichzeitig konvergent und divergent. Dieses bekannte Resultat wird hier unter Zuhilfenahme des Verhaltens der Integrale  $\int^\infty \Phi(x) dx$  etwas verallgemeinert.

H. Hornich (Wien).

**Mall, Josef: Ein Satz über die Konvergenz von Kettenbrüchen.** Math. Z. 46, 368—376 (1939).

Es wird der folgende Konvergenzsatz für Kettenbrüche

$$\frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_2|} + \dots + \frac{1}{|b_n|} + \dots \quad (*)$$

bewiesen: Die Koeffizienten  $b_{2\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) seien von Null verschiedene reelle Zahlen, und es sei überdies  $s_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} b_{2n} \neq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ). Die Koeffizienten  $b_{2\nu-1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) seien nicht alle gleich Null, insbesondere sei  $b_1 \neq 0$ , und es gebe eine Zahl  $\varepsilon > 0$ , mit der alle von Null verschiedenen  $b_{2\nu-1}$  die Ungleichungen  $\varepsilon \leq \arctan b_{2\nu-1} \leq \pi - \varepsilon$  erfüllen. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert der Kettenbruch (\*), wenn entweder (1) eine der beiden Reihen  $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_{2\nu+1}|$  und  $\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu^2 |b_{2\nu+1}|$  divergiert oder (2) im Falle der Konvergenz dieser beiden Reihen die Beziehung  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^{\nu} b_{2n} \right| = \infty$  gilt. Andernfalls divergiert der Kettenbruch. — Für den Spezialfall, daß die sämtlichen  $\arctan b_{2\nu-1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) einander gleich sind, wurde der Satz von H. Hamburger [Math. Ann. 82, 120—164 (1920)] mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen. Der in der vorliegenden Note gegebene Beweis für den allgemeineren Satz ist wesentlich einfacher.

F. Lösch (Rostock).

**Leighton, Walter: Convergence theorems for continued fractions.** Duke math. J. 5, 298—308 (1939).

Es handelt sich um Kettenbrüche der Form  $1 + \frac{a_1}{1+} \frac{a_2}{1+} \dots$ , wobei die  $a_i$  komplexe, von Null verschiedene Zahlen sind. Man weiß, daß es zur Konvergenz hinreicht, wenn die Beträge sämtlicher  $a_i$  die Schranke  $\frac{1}{4}$  nicht übersteigen. Diese Schranke kann nicht verbessert werden. Verf. konstruiert diejenigen Kettenbrüche, die den  $r$ -ten,  $(k+r)$ -ten,  $(2k+r)$ -ten, ... ( $k$  beliebig,  $r \leq k-1$ ) Näherungsbruch des ursprünglichen Kettenbruches zu Näherungsbrüchen haben und gewinnt daraus neue hinreichende Konvergenzbedingungen, die nicht aus dem angegebenen folgen.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

**Keller, Ott-Heinrich: Eine Bemerkung zu den verschiedenen Möglichkeiten eine Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln.** Math. Ann. 116, 733—741 (1939).

Es sei  $\omega$  eine fest gegebene reelle Irrationalzahl; dann gibt es unendlichviele „halbregelmäßige Kettenbruchentwicklungen“ (kurz: Kb.)

$$\omega = b_0 + \frac{\varepsilon_1}{|b_1|} + \frac{\varepsilon_2}{|b_2|} + \dots \quad (1)$$

mit  $\omega = b_0 + \varepsilon_1 q_1$ ,  $1/q_\nu = b_\nu + \varepsilon_{\nu+1} q_{\nu+1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ),  $b_\nu$  ganz,  $\varepsilon_{\nu+1} = \pm 1$ ,  $0 < q_{\nu+1} < 1$  (also  $b_{\nu+1} > 0$ ) für  $\nu = 0, 1, \dots$ . Ist  $K$  ein Kb., so sei  $\{K\}$  die Folge seiner Näherungsbrüche. — Werden die  $\varepsilon_{\nu+1}$  so gewählt, daß stets  $q_{\nu+1} > \frac{1}{2}$  ist, so entsteht der Vahlensche Kb.  $V$ ; stets ist  $\{K\}$  eine Teilfolge von  $\{V\}$ . — Gibt es ein  $\nu_0$  so, daß das  $\nu$ -te Glied von  $\{K_1\}$  für jedes  $\nu > \nu_0$  in der Folge  $\{V\}$  hinter dem  $\nu$ -ten Glied von  $\{K_2\}$  steht, so heiße  $K_1$  „rascher“ als  $K_2$ . Gibt es zu  $K_2$  keinen „rascheren“  $K_1$ , so heiße  $K_2$  ein „raschester“ Kb. [vgl. dazu H. Tietze, Über die raschesten Kettenbruchentwicklungen reeller Zahlen. Mh. Math. Phys. 24, 209—242 (1913)]. — Erfüllt jedes Glied  $p/q$  von  $\{K\}$  die Ungleichung  $\left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q^2}$  (2), so heiße  $K$  ein „engster“ Kb. [Zu jedem  $\omega$  gibt es engste Kb.; dies wäre aber falsch, wenn  $\frac{1}{2}$  durch eine kleinere Zahl ersetzt würde; vgl. J. H. Grace, The classification of rational approximations. Proc. London Math. Soc. (2) 17, 247—258 (1918).] — Verf. zeigt, wie man, von dem gewöhnlichen Kb. (d. h. alle  $\varepsilon_{\nu+1} = 1$ ) ausgehend, rascheste und engste Kb. einfach konstruieren kann, und beweist insbesondere, daß es zu jedem  $\omega$  mindestens einen „besten“ (d. h. raschesten und zugleich engsten) Kb. gibt. — Endlich wird ein einfacher

Beweis für folgenden Minkowskischen Satz gegeben: Ist  $\omega$  eine quadratische Irrationalität, so ist ihr Diagonalkb. [d. h. derjenige Kb.  $K$ , für welchen  $\{K\}$  genau aus allen Brüchen  $p/q$  mit (2) besteht] periodisch. Jarník (Praha).

Agnew, Ralph Palmer: On oscillations of real sequences and of their transforms by square matrices. Amer. J. Math. 61, 683—699 (1939).

Unter der Schwankung einer Folge  $s_n$  versteht man den Wert  $\Omega(s) = \overline{\lim}_{m,n \rightarrow \infty} |s_m - s_n|$ . Es handelt sich in der Hauptsache darum, diejenigen Matrizen  $A = \|a_{nk}\| (n, k = 1, 2, \dots)$  mit komplexen Elementen zu charakterisieren, die jede reelle beschränkte Folge  $x_n (n = 1, 2, \dots)$  in eine Folge  $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k (n = 1, 2, \dots)$  überführen, für die  $\Omega(y)$

$\leq \Omega(x)$  gilt. — Verf. zeigt zunächst, daß eine Matrix  $A$  dann und nur dann die genannte Eigenschaft hat, wenn sie von der Form  $A = A' + A''$  ist, wo  $A'$  eine konvergenz-erhaltende, spaltenweise konstante Matrix bedeutet, während  $A''$  eine „multiplizierende“ Matrix ist, welche jede reelle beschränkte Folge in eine Folge von nicht größerer Schwankung transformiert. Dabei heißt  $A = \|a_{nk}\|$  eine „multiplizierende“ Matrix mit dem Multiplikator  $\varrho$ , wenn sie jede konvergente Folge  $x_n \rightarrow x$  in eine Folge  $y_n \rightarrow \varrho x$

überführt (wenn also  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M (n = 1, 2, \dots)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 (k = 1, 2, \dots)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \varrho$  gilt); für  $\varrho = 1$  hat man speziell eine „reguläre“ Matrix. — Die eingangs gekennzeichnete Aufgabe ist damit darauf reduziert, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß eine multiplizierende Matrix mit komplexen Elementen jede reelle beschränkte Folge  $x_n$  in eine Folge  $y_n$  von nicht größerer Schwankung transformiert.

Solche Bedingungen werden angegeben, z. B.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{fin sup}_{U_{nk} = \pm 1} |\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} U_{nk}|) \leq 1$  oder

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{fin sup}_{V_{nk} = 0,1} |\frac{1}{2}\varrho - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} V_{nk}|) \leq \frac{1}{2}$  oder  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\text{fin sup}_{-\pi < \theta \leq +\pi} |\Re(e^{i\theta} a_{nk})|) \leq 1$ . — Man weiß [vgl. W. A. Hurwitz, Amer. J. Math. 52, 611—616 (1930) und R. P. Agnew, Trans. Amer. Math. Soc. 33, 411—424 (1931)], daß eine reguläre Matrix  $A$  mit komplexen Elementen dann und nur dann jede komplexe beschränkte Folge  $x_n$  in eine Folge  $y_n$

mit  $\Omega(y) \leq \Omega(x)$  überführt, wenn  $(*) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$  gilt. Durch diese Bedingung

werden auch die regulären Matrizen mit reellen Elementen charakterisiert, welche jede reelle beschränkte Folge  $x_n$  in eine Folge  $y_n$  mit  $\Omega(y) \leq \Omega(x)$  überführen. Verf. zeigt jedoch an Beispielen, daß für reguläre Matrizen mit komplexen Elementen, welche jede reelle beschränkte Folge in eine solche von nicht größerer Schwankung überführen, das Bestehen von  $(*)$  nicht notwendig ist. Insbesondere wird eine reguläre Matrix  $A$  konstruiert, bei der  $\Omega(y) \leq \Omega(x)$  für jede reelle beschränkte Folge  $x_n$  gilt, während

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \frac{\pi}{2}$  ist. Notwendig dafür, daß eine multiplizierende Matrix  $A$  mit dem

Multiplikator  $\varrho$  jede reelle beschränkte Folge in eine solche von nicht größerer Schwankung überführt, ist jedoch das Bestehen der Beziehungen  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}| = |\varrho| \leq 1$ . — Anschließend werden noch die Matrizen  $A$  charakterisiert, die jede reelle beschränkte Folge in eine solche von nicht größerer „Norm“ transformieren, wobei als Norm der Folge  $s_n$  der Wert  $L(s) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |s_n|$  bezeichnet wird. Endlich wird

bemerkt, daß sich die Ergebnisse auf Transformationen von Folgen in Funktionen übertragen. F. Lösch (Rostock).

Meyer-König, Werner: Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. I. Math. Z. 45, 447—478 (1939) u. Tübingen: Diss. 1939.

Verf. untersucht, inwieweit das Auftreten von Lücken bei einer Reihe die Kon-

vergenz derselben nach sich zieht, falls die Reihe durch ein Summierungsverfahren summierbar ist. In diesem ersten Teil wird hauptsächlich das  $(C, k)$ - und  $(H, k)$ -Verfahren untersucht, die Lückenbedingungen aber in verschiedenen Richtungen erweitert, insbesondere wird statt des Verschwindens der Glieder einer Lücke nur die Einschränkung ihrer Größenordnung vorausgesetzt. Als Hauptergebnis sei der folgende Satz erwähnt:

„ $s_n = \sum_{v=0}^n u_v$  sei  $(C, k)$ - bzw.  $(H, k)$ -limitierbar ( $k > 0$  ganz) und (I)  $n|u_n| < M$  für  $n_v + 1 \leq n \leq n'_v$  mit  $n'_v - n_v > \delta n_v$  ( $\delta > 0$ ),  $n < n'_v < n_{v+1}$ , dann ist die Teilfolge  $s_{k_v}$  konvergent, wo die Indexfolge  $k_v$  die Zahlen  $n_v, n_v + 1, n_v + 2, \dots, n'_v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) durchläuft.“ Dabei werden noch einerseits Bedingungen angegeben, wann (I) durch eine einseitige Bedingung ersetzt werden kann, und andererseits die Gültigkeit dieses Satzes für das  $(H, \infty)$ -Verfahren geprüft. Es ergibt sich in diesem Falle, daß (I) zu ersetzen ist durch „ $k_v u_{k_v} \rightarrow 0$ , wobei  $k_v$  die Zahlen  $n_v, n_v + 1, n_v + 2, \dots, n'_v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) durchläuft, mit  $n'_v/n_v \rightarrow \infty$ “.

J. Karamata (Beograd).

**Kloosterman, H. D.:** Über die Umkehrung einiger Limesätze. *Mathematica, Zutphen* B 8, 1—11 (1939) [Holländisch].

Beweis des Satzes: Wenn die reelle Funktion  $f(x)$  für jedes  $x > A > 0$  Ableitungen  $(m+1)$ -ter Ordnung hat ( $m$  eine natürliche Zahl) und wenn es daneben eine positive Konstante  $K$  gibt, mit  $x \cdot f^{(m+1)}(x) < K$  für jedes  $x > A$ , folgt aus der Existenz eines endlichen Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m}$ , daß auch  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{(m)}(x)}{m!}$  existiert und den gleichen Wert hat. Außerdem Beweis eines Satzes von Hardy-Landau über gewöhnliche Konvergenz von  $(C, m)$ -summierbaren Reihen.

J. Ridder (Groningen).

**Kuttner, B.:** Note on the Cesàro limit of a function. *J. London Math. Soc.* 14, 132—137 (1939).

Verf. führt die Mittelbildung  $\frac{-1}{G(x)} \int_0^x s(t) d\{G(x-t)\}$ , mit  $G(x) = \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(x)}$  als entsprechendes Integralanalogon des  $(C, k)$ -Verfahrens ein, da sich der Ausdruck

$-\int_0^x s(t) d\left\{1 - \frac{t^k}{x^k}\right\}$  für  $s(t) = \sum_{0 \leq n \leq x} u_n$  auf die Riesz'schen typischen Mittel  $(R, k)$  und

nicht auf die  $(C, k)$ -Mittel zurückführen läßt, zeigt aber durch Gegenbeispiele, daß für genügend großes ganzzahliges  $k$  aus der so definierten  $(C, k)$ -Limitierbarkeit nicht nur die  $(R, k)$ -Limitierbarkeit, sondern auch die  $(C, k')$ -Limitierbarkeit für  $k' > k$  nicht gefolgt werden kann.

J. Karamata (Beograd).

**Szász, Otto:** On the Cesàro and Riesz means of Fourier series. *Compositio Math.* 7, 112—122 (1939).

Vor wenigen Jahren hat Fejér bemerkt, daß höhere Cesàromittel einer Fourierreihe den gestaltlichen Eigenschaften der erzeugenden Funktion in mehrfacher Hinsicht folgen. Verf. gibt hier solche Aussagen für Riesz'sche Mittel 2. Ordnung, d. i. zu

$$\sum_{v=1}^n u_v(x): \quad R_n^{(2)}(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{v=1}^n (n-v+1)^2 u_v(x).$$

Diese drückt er durch Cesàromittel 2. und 1. Ordnung aus und benutzt sie umgekehrt zur Darstellung der  $C_n^{(3)}$ . Dabei zeigt sich, daß die Unbestimmtheitsgrenzen der  $C_n^{(2)}$  die der  $R_n^{(2)}$  einschließen, während umgekehrt (seit 1924 bekannt) aus der Existenz des  $R^{(2)}$ -Limes die des  $C^{(2)}$ -Limes noch nicht folgt; damit das bei Reihensummierung folge, ist notwendig und hinreichend die Zusatzforderung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{v=1}^n (n-v+1) v u_v \geq 0,$$

hinreichend  $u_n \rightarrow 0$ . — In der eingangs genannten Richtung beweist Verf. dann: Mit  $f(x)$  ( $\infty$  Sinusreihe für  $\langle 0, \pi \rangle$ ) sind auch schon die  $R_n^{(2)}$  monoton bzw. nach oben konvex (was Fejér erst für die  $C_n^{(2)}$  erhielt). Ein ähnlicher Einfluß zeigt sich bei einem Sonderfall schlichter Abbildung mit reellen Koeffizienten. *Ullrich* (Gießen).

**Karamata, J.:** Über einen Tauberschen Satz im Dreikörperproblem. Amer. J. Math. 61, 769—770 (1939).

Anknüpfend an eine Note von R. P. Boas jr. (dies. Zbl. 20, 17) gibt Verf. eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung, die die von Boas angegebene hinreichende Bedingung enthält. Sie lautet, für den Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$  als Umkehrung des  $(C, 1)$ -Verfahrens formuliert: Aus

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t) dt \rightarrow s \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ folgt } s(x) \rightarrow s \text{ für } x \rightarrow \infty,$$

wenn für eine in  $(-\infty, +\infty)$  stetige und eigentlich wachsende Funktion  $\Phi(x)$  die Konvergenzbedingung

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq x' \leq \lambda x} \{\Phi(s(x')) - \Phi(s(x))\} \geq -w(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow 1$$

erfüllt ist.

*F. Lösch* (Rostock).

**Dobbie, J. M.:** A generalized Lambert series. Duke math. J. 5, 325—332 (1939).

Als Verallgemeinerung der Lambertschen Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n (1 - x^n)^{-1}$  betrachtet Verf. Reihen der Form  $(*) \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda n} h(x^n)$ , wo  $\lambda$  eine positive, ganze Zahl und  $h(x)$  eine in  $|x| < 1$  analytische Funktion mit  $h(0) \neq 0$  bedeutet. Nach Aussagen über ihr Konvergenzverhalten und die Entwickelbarkeit analytischer Funktionen in Reihen der Form  $(*)$ , erhält Verf. als Hauptresultat den folgenden Grenzwertsatz [vgl. für Lambertsche Reihen: K. Knopp, J. reine angew. Math. 142, 283—315 (1913) und G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2) 13, 192—198 (1913)], der zugleich eine Nichtfortsetzbarkeitsbedingung liefert: Es sei  $h(x)$  in  $|x| < 1$  analytisch und besitze auf  $|x| = 1$  endlich viele Singularitäten, insbesondere sei  $x = 1$  ein Pol der Ordnung  $r$ . Ferner seien für  $x_0 = e^{2\pi i k'/k}$ , wo  $k, k'$  teilerfremde positive ganze Zahlen bedeuten, die Punkte  $x_0^l$  ( $l = 1, 2, \dots, k-1$ ) Pole der Ordnung  $r_l \leq r-1$  von  $h(x)$ . Erfüllen dann die Koeffizienten  $b_n$  der mit positivem ganzem  $\lambda$  gebildeten Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda n} h(x^n)$$

für ein ganzes  $p \geq 0$  die beiden Bedingungen: (1)  $\sum_{\nu=1}^{\infty} (k\nu)^{-r} b_{k\nu}$  ist  $(C, p)$ -summierbar zum Wert  $S$ , (2) für die  $p$ -ten Cesàroschen Mittel  $B_{\nu, l}^p$  der Reihen  $\sum_{\nu=0}^{\infty} (k\nu + l)^{-r_l} b_{k\nu+l}$  ( $l = 1, 2, \dots, k-1$ ) gelten die Abschätzungen  $B_{\nu, l}^p = o(\nu^{p+1})$ , dann ist  $f(x)$  für  $|x| < 1$  analytisch, und es gilt für radiale Annäherung von  $x$  an  $x_0$  die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^r f(x) = SA$$

mit  $A = \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^r h(x)$ . Sind die Voraussetzungen für unendlich viele ganze Zahlen  $k$  erfüllt, für die sämtlich  $S = (C, p) - \sum_{\nu=1}^{\infty} (k\nu)^{-r} b_{k\nu} \neq 0$  ist, so ist  $f(x)$  nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar. *F. Lösch* (Rostock).

**Hamilton, Hugh J.:** Preservation of partial limits in multiple sequence transformations. Duke math. J. 5, 293—297 (1939).

Die Note ergänzt eine frühere Arbeit des Verf., die in dies. Zbl. 13, 303 besprochen wurde. Dort sind die in dem Referat unter III und IV genannten Fragen nur für den Fall verschwindender Reihenlimites erledigt worden. Jetzt wird die vollständige Lösung gegeben. *F. Lösch* (Rostock).

**Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:**

**Brun, Viggo:** Eine elementare Umbildung der Riemannschen Zetafunktion. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 101—104 (1939).

Von der Identität

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots - \frac{1}{(2^r)^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{(2^r)^s} \\ - \frac{2}{2^s} \left( 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{(2^{r-1})^s} \right)$$

ausgehend, beweist Verf. die Formel

$$(2) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - \left\{ \frac{2^{s-1}}{3} - \frac{2^{s-1}}{4} + \frac{2^{s-1} + 4^{s-1}}{5} - \frac{2^{s-1} + 4^{s-1}}{6} + \frac{2^{s-1} + 4^{s-1}}{7} \right. \\ \left. - \frac{2^{s-1} + 4^{s-1}}{8} + \frac{2^{s-1} + 4^{s-1} + 8^{s-1}}{9} - \dots - \frac{2^{s-1} + 4^{s-1} + 8^{s-1}}{16} + \dots \right\}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus (1) für  $s=1$  die folgende Entwicklung der Eulerschen Konstanten  $C \left( = \lim_{s \rightarrow 1} \left[ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right] \right)$ :

$$C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{6} - \frac{2}{7} + \frac{2}{8} - \frac{3}{9} + \frac{3}{10} - \frac{3}{11} + \frac{3}{12} - \frac{3}{13} + \frac{3}{14} - \frac{3}{15} \\ + \frac{3}{16} - \frac{4}{17} + \frac{4}{18} - \dots \dots + \frac{4}{32} - \frac{5}{33} + \dots + \frac{5}{64} - \frac{6}{65} + \dots$$

Anwendungen von (2) auf den Primzahlsatz werden angekündigt. *Deuring* (Jena).

**Guinand, A. P.:** A formula for  $\zeta(s)$  in the critical strip. *J. London Math. Soc.* 14, 97—100 (1939).

Für  $0 < \Re(s) < 1$ ,  $0 < x \neq 0$  (1) sei  $x^{1-s} : (s-1) - \frac{1}{2} \zeta(s) + \sum_{n=1}^{[x]} n^{-s} = x^{1-s} F(s, x)$ .

Verf. wertet die Integralgleichung aus:  $F(s, x) + \int_0^\infty dy F(1-s, y) (e^{2\pi i xy} + e^{-2\pi i xy}) = 0$ .  
*Maier* (Greifswald).

**Vignaux, Juan-Carlos:** Sur les séries simples et doubles asymptotiques de Dirichlet. *C. R. Acad. Sci., Paris* 209, 84—87 (1939).

Die folgenden ( $D$ )-Analoge:  $f(z) \sim \sum_{n=1}^\infty a_n/n^z$  bzw.  $f(z) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-z\lambda_n}$  ( $z \rightarrow \infty$ ) der asymptotischen Entwicklung werden definiert und ihre Haupteigenschaften gegeben.

*Karamata* (Beograd).

**Brauers, N.:** Sur l'intégration des fonctions presque-périodiques des deux variables indépendantes. *Comment. math. helv.* 11, 330—335 (1939).

Wenn die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial F}{\partial x_2}$  einer beschränkten Funktion  $F(x_1, x_2)$  zweier reeller Variabler fastperiodisch sind, dann ist  $F(x_1, x_2)$  auch selber fastperiodisch. Der ausführliche Beweis soll in den *Acta Universitatis Latviensis* erscheinen. *Maak*.

**Hartman, Philip:** Mean motions and almost periodic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 46, 66—81 (1939).

Die Arbeit ist ein Beitrag zum Problem der mittleren Winkelbewegung einer komplexwertigen und fastperiodischen Funktion  $f(t)$ . Es wird eine in einem Streifen  $\alpha < \sigma < \beta$  analytische fastperiodische Funktion  $f_\sigma(t) = f(\sigma + it)$  zugrunde gelegt. In den Untersuchungen von Jessen spielt die Jensenfunktion

$$\varphi(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \log |f(\sigma + it)| dt$$

eine wesentliche Rolle.  $\varphi(\sigma)$  ist in  $(\alpha, \beta)$  konvex und daher bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge von Werten  $\sigma$  differenzierbar. Durch Fortführung der Methoden von Jessen beweist Verf., daß die mittlere Bewegung  $\mu(\sigma)$  von  $f_\sigma(t)$  existiert und gleich

$\varphi'(\sigma)$  ist, sofern  $\varphi'(\sigma)$  vorhanden ist. Für speziellere Klassen von Funktionen (trigonometrische Polynome) werden schärfere Aussagen über die Ausnahmewerte gemacht. Ferner wird der analytische Charakter von  $\mu(\sigma)$  untersucht. Von der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion wird  $\mu(\sigma) \equiv 0$  für  $\sigma > \frac{1}{2}$  bewiesen. *E. Hopf* (Leipzig).

**Kampen, E. R. van:** On the asymptotic distribution of a uniformly almost periodic function. Amer. J. Math. **61**, 729—732 (1939).

Im Anschluß an H. Bohr [Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. **10**, Nr 6, 12—17 (1929)] wird zu vorgegebener beschränkter Folge von reellen Zahlen  $x_k$  eine fastperiodische (genauer: grenzperiodische) Funktion  $f(t)$  konstruiert mit folgender Eigenschaft: Wenn  $x \neq x_k$  ist, so haben die Mengen von reellen Zahlen  $t$ , für die  $f(t) \leq x$  bzw.  $f(t) < x$  bzw.  $f(t) = x$  ein relatives Maß. Falls  $x = x_k$  ist, so hat die Menge aller  $t$ , für die  $f(t) = x$  ist, sicher kein relatives Maß. *Maak* (Heidelberg).

**Petersen, Richard:** Über Multiplikatoren der Fourierentwicklung einer fastperiodischen Funktion. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.). 9 Congr. des Math. scand. 105—112 (1939).

Es sei  $g(t) = f(it)$  eine reelle fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen  $t$  mit der Fourierentwicklung  $g(t) = f(it) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n t} + \bar{A}_n e^{-i\lambda_n t}$ . Dann sind

$$\sum A_n A_n e^{A_n(\sigma + it)} \quad \text{für } \sigma < 0 \quad \text{und} \quad \sum (-A_n) \bar{A}_n e^{-A_n(\sigma + it)} \quad \text{für } \sigma > 0$$

die Dirichletentwicklungen zweier in der Halbebene  $(-\infty, 0]$  bzw.  $[0, +\infty)$  fastperiodischen analytischen Funktionen  $\varphi^{(+)}(\sigma + it)$  und  $\varphi^{(-)}(\sigma + it)$ . Es ist

$$\varphi^{(-)}(s) = \varphi^{(-)}(\sigma + it) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\sigma x + it)}{(x + i)^2} dx \quad \sigma > 0$$

Auch  $\varphi^{(+)}(s)$  wird durch dasselbe Integral dargestellt, nur eben mit  $\sigma < 0$ . Bildet man nun  $\varphi_c(s) = \varphi^{(-)}(s + c) + \varphi^{(+)}(s - c)$  mit  $c > 0$  und weiter  $\Phi_c(s) = \int \varphi_c(s) ds$ , so erhält man in  $\Phi_c(s)$  eine in einem Streifen  $[-c, c]$  fastperiodische analytische Funktion mit der Entwicklung  $\Phi_c(s) \sim \sum A_n e^{A_n(s-c)} + \bar{A}_n e^{-A_n(s+c)}$ , die für  $c \rightarrow 0$  gegen  $f(it)$  konvergiert. *Maak* (Heidelberg).

**Pitt, H. R.:** On the Fourier coefficients of almost periodic functions. J. London Math. Soc. **14**, 143—150 (1939).

Es seien  $\lambda_n$  reelle und  $a_n$  komplexe Zahlen mit

$$\mathfrak{S}_p\{a_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

für gewisses  $p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ). Wählt man dann  $p'$ , so daß gilt  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , so gibt es eine  $B_{p'}$  fp. Funktion (fastperiodisch nach Besicovitch)  $f(x)$  mit der Fourierreihe  $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ . Folgende Ungleichungen haben Gültigkeit:

$$\mathfrak{M}_{p'}\{f\} \leq \mathfrak{S}_p\{a_n\}, \quad \mathfrak{S}_{p'}\{a_n\} \leq \mathfrak{M}_p\{f\},$$

wobei

$$\mathfrak{M}_p\{f\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Es sei  $\infty > q \geq p > 1$  und  $\mu = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$ ; weiter nehmen wir an, daß

$$A_n = \sum_{n \leq h_n < n+1} |a_n|$$

für jedes  $n$  endlich ist, und daß

$$\mathfrak{S}_p\{A_n(|n| + 1)^\mu\} < \infty.$$

Dann existiert eine  $S_q$  fp. Funktion  $f(x)$  (fp. nach Stepanoff) mit der Fourierreihe  $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ .

Es gilt die Ungleichung

$$S_q\{f\} = \text{ob Gr} \int_{-\infty < x < +\infty}^{\left\{ \int_x^{x+1} |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}} < K \mathfrak{S}_p\{A_n(|n| + 1)^{\mu}\},$$

worin  $K$  von  $p$  und  $q$  abhängt.

Maak (Heidelberg).

Levitan, B., et W. Stepanov: Sur les fonctions presque périodiques appartenant au sens strict à la classe W. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 220—223 (1939).

Die Verf. konstruieren auf einfache Weise eine im verallgemeinerten Sinne f.p. Funktion  $F(x)$ . Diese Funktion gehört der Weylschen, nicht aber der Stepanoffschen Funktionenklasse an. Sie bildet ein besseres Beispiel einer solchen Funktion als die bisher bekannten, da sie sich nicht in der Form  $\varphi(x) + \psi(x)$  schreiben läßt, wobei  $\varphi(x)$  eine nach Stepanoff f.p. Funktion ist und für  $\psi(x)$  gilt

$$\limsup \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |\psi(x)| dx = 0.$$

Maak (Heidelberg).

Lewin, B., and B. Lewitan: On the Fourier series of generalized almost periodic functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 539—542 (1939).

Verf. bezeichnet eine auf der ganzen reellen Achse definierte stetige Funktion  $f(x)$  als  $N$ -fastperiodisch, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  und  $N > 0$  eine fastperiodische Punktmenge  $\{\tau\}$  [vgl. B. Lewitan, C. R. Acad. Sci. URSS 17, 287 (1937); dies. Zbl. 18, 58] gibt, so daß für  $|x| < N$   $|f(x - \tau) - f(x)| < \varepsilon$  gilt. Für solche Funktionen wurde in der erwähnten Arbeit ein Eindeutigkeitssatz für Fourierreihen aufgestellt, die mit Hilfe der Bohrschen oder einer allgemeineren Mittelbildung der  $N$ -fastperiodischen Funktionen zugeordnet werden können. Ein Existenzsatz bestand jedoch nicht, und hier wird durch Konstruktion eines Gegenbeispiels gezeigt, daß jedenfalls das Bohrsche Mittel für diese Funktionenklasse nicht stets existiert. Wecken (Marburg a. d. L.).

Wecken, Franz: Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen. Math. Z. 45, 377—404 (1939).

Um eine Maßtheorie auf abstrakten Mengen durchzuführen, ist es, wie man uns schwer einsieht, nicht einmal nötig, tatsächlich vorauszusetzen, daß man es mit Mengen zu tun hat. Verf. betrachtet statt Systemen von Mengen sogenannte  $\Sigma$ -Systeme. Ein  $\Sigma$ -System ist eine Boolealgebra, in der aber auch die Vereinigung von unendlich viel Elementen gebildet werden kann. Außerdem soll eine Maßfunktion erklärbar sein. Mit ihrer Hilfe läßt sich eine Metrik im System einführen. — Es sei ein System meßbarer Mengen gegeben. Dann ist eine meßbare Funktion  $f(x)$  eine solche Funktion, für die die Mengen  $E[f(x) \leq \lambda] = E(\lambda)$  für jedes  $\lambda$  dem System angehören. Hat man aber statt der Mengen ein  $\Sigma$ -System, so kann man gar nicht von Funktionen im gewöhnlichen Sinne sprechen. Man geht deshalb umgekehrt aus von einer Funktion  $E(\lambda)$  der reellen Zahlen  $\lambda$ , deren Werte Elemente des  $\Sigma$ -Systems sind. Man spricht dann von einer „meßbaren Funktion  $f$ “, die diese Funktion  $E(\lambda) = E[f \leq \lambda]$  erzeugt. Die Metrik im  $\Sigma$ -System überträgt sich auch auf diese „meßbaren Funktionen“. Für solche  $\Sigma$ -Systeme und derartige meßbaren Funktionen lassen sich nun alle bekannten Sätze der Maß- und Integraltheorie herleiten, z. B. der, daß die meßbaren Funktionen einen bezüglich der erwähnten Metrik vollständigen, kommutativen Ring bilden. — Es gibt Sätze in der Theorie der f.p. Funktionen auf der reellen Zahlengraden, die in der klassischen Theorie periodischer Funktionen auch auftauchen und dort mit Hilfe der Lebesgueschen Integraltheorie bewiesen werden, z. B. der Satz von Riesz-Fischer-Besicovitch und der Satz von der Existenz von Verteilungsfunktionen. In der Theorie der f.p. Funktionen war es notwendig, ganz andere Beweise zu erbringen, vor allem deshalb, weil die Mittelwertbildungen nur endlich additiv sind. — Es gelingt Verf., ein  $\Sigma$ -System anzugeben, dessen zugehörige Menge meßbarer Funktionen „stetig isomorph“ ist zu der Menge der Kovankoschen f.p. Funktionen. Auf

diese Weise kann die obenerwähnte Analogie von Sätzen über periodische und f.p. Funktionen auch in den Beweisen zum Ausdruck gebracht werden. *Maak.*

### **Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:**

**Petrovitch, Michel:** *Propriété commune à une multitude d'équations différentielles.* Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 5, 49—56 (1939).

L'A. osserva che esistono classi di equazioni per le quali la conoscenza di una relazione tra la variabile indipendente e due suoi integrali particolari  $y_1, y_2$  permette la determinazione di questi stessi integrali separatamente, e mostra che se dell'equazione di Riccati  $y' + f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0$  si conosce in funzione di  $x$  una delle espressioni  $y_1 + y_2, y_1 - y_2, y_1^2 \pm y_2^2$ , l'integrale generale dell'equazione può determinarsi corrispondentemente con due, una, tre quadrature. — Nel caso dell'equazione  $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$ , che colla nota trasformazione  $y'/y = u$  si riduce ad un'equazione di Riccati, si trova che la conoscenza del prodotto di due suoi integrali particolari permette la determinazione dell'integrale generale con due quadrature.

*Giovanni Sansone (Firenze).*

**Petrovitch, Michel:** *Série taylorienne exprimant l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre.* Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 5, 21—23 (1939).

L'A. enuncia la condizione necessaria e sufficiente perchè la serie  $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n$   $A_n = A_n(x_0, y_0), A_0 = y_0$ , supposta olomorfa nell'intorno di  $(x_0, y_0)$ , soddisfi un'equazione differenziale della forma  $y' = f(x, y)$ ; indica poi la costruzione di quest'ultima equazione ed alcune applicazioni del suo risultato. *Giovanni Sansone (Firenze).*

**Pedrazzini, Pierino:** *Sulla trattrice ordinaria e sulle curve di inseguimento.* Period. Mat., IV. s. 19, 146—149 (1939).

Aufstellung der Differentialgleichung der Verfolgungskurve bei beliebigen Geschwindigkeiten des Führers und Verfolgers. Sonderfall der gewöhnlichen Traktrix.

*Harald Geppert (Gießen).*

**Mambriani, Antonio:** *Sugli algoritmi integro-differenziali lineari. I.* Ist. Lombardo, Rend., III. s. 72, 147—159 (1939).

Ausgehend von einer beliebigen Zerlegung des linearen Differentialausdrucks  $Ly = p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y$  ( $a \leq x \leq b$ ; daselbst  $p_0(x) \neq 0$ ) in zwei Summanden:  $Ly = L_1 y + L_2 y$  (von denen nur einer notwendig von der zweiten Ordnung ist) betrachtet Verf. zunächst formal den iterativen Prozeß

$$L_1 y_n(x) = f(x) - L_2 y_{n-1}(x) \quad (n = 0, 1, \dots);$$

hiebei werden naturgemäß die Lösungen von  $L_1 y = 0$  als bekannt angesehen. Durch die Anfangsbedingungen  $y_{-1}(x) = 0, y_n(0) = \gamma_0, y'_n(0) = \gamma_1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist die Folge  $y_n(x)$  festgelegt. Durch Einführung von Symbolen für die Lösung von  $L_1 y = g(x)$  ergibt sich eine Art „explitime“ Darstellung für  $y_n(x)$ . Im Falle  $L_1 = D^2$  ( $D = \frac{d}{dx}; p_0 = 1$ )

kommt man auf die Peano-Picardsche Iteration. Die Behandlung der Frage der Konvergenz nach einer Lösung von  $Ly = f(x)$  wird für eine Fortsetzung in Aussicht gestellt; ferner wird auf die alsdann sich ergebende Möglichkeit hingewiesen, die große Freiheit bei der Wahl der Zerlegung von  $L$  zur Gewinnung ausgezeichnete Lösungen von Differentialgleichungen auszunützen. (Gerade in diesem Sinne treten auch sonst Sonderfälle bzw. Modifikationen des Verfahrens auf: vgl. z. B. Ince, Ordinary Differential Equations 1927, 169, wo  $L_1 = D^2 - D$ . Anm. d. Ref.) *Hermann Schmidt.*

**Gröbner, Wolfgang:** *Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.* Mh. Math. Phys. 47, 247—284 (1939).

Sind  $p_1, \dots, p_s$  lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, also Polynome in  $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \partial_m = \frac{\partial}{\partial x_m}$  mit Koeffizienten aus einem Körper  $K$ , so er-

zeugen sie im Polynombereich  $\Re = K[\partial_1, \dots, \partial_m]$  ein Ideal  $\alpha$ , auf das man die gesamte Theorie der Polynomideale anwenden kann. „Integrale“ des Ideals  $\alpha = (p_1, \dots, p_r)$  sind solche Potenzreihen  $u$  in  $x_1, \dots, x_n$ , die den Differentialgleichungen

$$p_1 u = 0, \quad \dots, \quad p_r u = 0$$

genügen. Die Gesamtheit dieser Integrale stimmt, von der Bezeichnung abgesehen, mit dem Macaulayschen „inverse system“ überein, und sie bestimmt das Ideal eindeutig. Ist  $\xi$  eine Nullstelle von  $\alpha$ , so ist  $\exp(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_m x_m)$  ein Integral von  $\alpha$ . Ist  $\alpha$  prim und  $\xi$  eine allgemeine Nullstelle, so ist  $\exp(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_m x_m)$  ein „vollständiges Integral“. Ist  $\alpha$  Durchschnitt von Primäridealen, so ist das Integralsystem Summe der Integralsysteme der Primärideale. Für nulldimensionale Ideale wird die Aufgabe, alle Integrale zu finden, vollständig gelöst: sie führt auf Polynome in  $x_1, \dots, x_m$ , multipliziert mit Exponentialausdrücken  $\exp(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_m x_m)$ . Im nulldim. Fall sind alle Integrale Linearkombinationen von endlichvielen  $u_1, \dots, u_n$ , mit Koeffizienten aus  $K$ , wobei  $n$  der lineare Rang des Restklassenringes  $\Re/\alpha$  ist. Ein System von Potenzreihen  $u_1, \dots, u_n$  bildet dann und nur dann die Basis der Integrale eines nulldimensionalen Ideals, wenn die Ableitungen  $\partial_k u_i$  wieder Linearkombinationen von  $u_1, \dots, u_n$  sind, oder auch wenn Funktionalgleichungen

$$u_i(x+y) = \sum_{k,l} a_{kl}^i u_k(x) u_l(y)$$

bestehen. Die  $a_{kl}^i$  sind die Zusammensetzungs konstanten eines zu  $\Re/\alpha$  isomorphen hyperkomplexen Systems. — Mit einigen Bemerkungen über mehrdimensionale Ideale, über die Potentialgleichung und über mögliche Verallgemeinerungen (nichtkonstante Koeffizienten, simultane Differentialgleichungen) schließt die Arbeit.

van der Waerden (Leipzig).

**Palamà, G.:** Sull'equazione differenziale lineare soddisfatta dal prodotto  $u_1 u_2 \dots u_m$  degli integrali particolari della  $u'' + f_1 u' + f_2 u = 0$ , e su di una formula integrale dei polinomi d'Hermite. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 230—235 (1939).

Verf. sucht die lineare Differentialgleichung kleinster Ordnung, welcher die Produkte von  $m$  partikulären Integralen der Gleichung  $u'' + f_1 u' + f_2 u = a$ , (1) genügen, wo  $f_1$  und  $f_2$  zwei beliebige Funktionen von  $x$  sind. Bezeichnen  $U_1$  und  $U_2$  zwei unabhängige Integrale von (1), so ist die gesuchte Gleichung diejenige von der Ordnung  $m+1$ , die die Funktionen  $U_1^{m-k} U_2^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, m$ ) zu partikulären Integralen hat; für die Koeffizienten dieser Gleichung gibt Verf. einige Rekursionsformeln, die freilich ein rasches Rechnen gestatten. Das Ergebnis führt auf die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{2n}^3(x) H_{2m}(x) dx = a_{2m} 2^{2m} (2m)! \sqrt{\pi}, \quad (m \leq 3n)$$

in der  $a_{2m}$  durch Rekursion gegeben ist.

C. Miranda (Penova).

**Zwirner, Giuseppe:** Un'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 334—336 (1939).

Observation méthodologique relative à une proposition démontré par Scorza Dragoni (ce Zbl. 20, 223).

N. Cioranescu (Bukarest).

**Viola, T.:** Dimostrazione della convergenza di un procedimento di M. Picone per il calcolo degli autovalori. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 180—185 (1939).

Betrachtet werden Eigenwertprobleme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^p H_{ij}(t, \lambda) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

mit  $p$  Randbedingungen an den Stellen  $t = a$  und  $t = b$ . Es werden  $p$  Fundamentallösungen des Systems durch Polygonzüge (bei Teilung des Intervalles  $a, b$  in  $n$  gleiche Teile) angenähert. Die Bedingung, daß eine geeignete Linearkombination dieser  $p$  Näherungen für die Fundamentallösungen die Randbedingungen erfüllt, ist eine

Gleichung (Verschwinden einer Determinante  $\Delta_n(\lambda)$  mit  $p$  Reihen) für Näherungswerte der Eigenwerte  $\lambda$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gehen diese Gleichungen in die transzendente Gleichung  $D(\lambda) = 0$  für die Eigenwerte und die Näherungen in die Eigenwerte über. In jedem abgeschlossenen Gebiet der komplexen  $\lambda$ -Ebene haben  $D(\lambda) = 0$  und  $\Delta_n(\lambda) = 0$  für genügend große  $n$  die gleiche Anzahl von Nullstellen. Collatz (Karlsruhe).

Rosenblatt, Alfred: Sur les points singuliers des équations différentielles. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 10—11 (1939).

Für ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\left( \sum A y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^\beta \right) \frac{dy_1}{dx} = \sum A^1 y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^{\beta^1}, \quad \left( \sum A y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^\beta \right) \frac{dy_2}{dx} = \sum A^2 y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} x^{\beta^2}$$

werden Integrale des Typus  $y_1 = v_1 x^{\mu_1} e^{-k_1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^m}$ ,  $y_2 = v_2 x^{\mu_2} e^{-k_2 \left(\log \frac{1}{x}\right)^m}$ , ( $0 < m < 1$ ) gesucht. G. Cimmino (Cagliari).

Soboleff, S.: Sur la théorie des équations hyperboliques aux dérivées partielles. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 71—98 u. franz. Zusammenfassung 98—99 (1939) [Russisch].

Dans une première partie l'auteur étudie l'équation linéaire

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \quad (1)$$

où les  $A_{ij}$  sont des fonctions de  $x_1, x_2 \dots x_n$  et de  $t$  et où  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ii} p_i p_j$  est une forme définie positive des variables  $p_i$  dans la partie considérée de l'espace  $(x_1, x_2 \dots t)$ . Il s'agit de trouver la fonction  $u(x_1, x_2 \dots x_n, t)$  qui satisfait à (1) et aux conditions

$$u(x_1, x_2 \dots x_n, 0) = u_0(x_1, x_2 \dots x_n); \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial t} J_{t=0} = u_1(x_1, x_2 \dots x_n) \right]. \quad (1')$$

Les fonctions  $A_{ij}$  sont supposées de satisfaire aux conditions analogues de (5). — Dans la seconde partie l'équation non linéaire est considérée

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \left( u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_r}, x_r, t \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left( u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_r}, t, x_r \right). \quad (2)$$

La méthode de résolution est fondée sur l'emploi de l'équation fonctionnelle suivante introduite par I. Petrowsky

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \left( u(t-\eta), \frac{\partial u}{\partial t}(t-\eta), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(t-\eta) \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = F \left( u(t-\eta), \frac{\partial u}{\partial t}(t-\eta), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(t-\eta) \right); \end{aligned} \quad (3)$$

cette équation diffère de (1) en ce que, dans les coefficients  $A_{ij}$ , la fonction  $u$  ainsi que ses dérivées du premier ordre entrent au point  $(x_1, x_2 \dots x_n, t-\eta)$ . Si les coefficients  $A_{ij}$  de (2) satisfont à la condition

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} p_i p_j > 0 \quad (4)$$

ainsi qu'aux conditions

$$\int \cdots \int_D \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \left( \frac{\partial^\beta A_{ij}}{\partial u^{\gamma} \partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^\beta \dots \partial \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}} \right) \right]^2 dx_1 \dots dx_n \leq M$$

$$\varrho = 0, 1, \dots, \left[ \frac{n}{2} \right] + 2; \quad \beta \leq \left[ \frac{n}{2} \right] + 2,$$

$$\int \cdots \int_D \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \left( \frac{\partial^\beta F}{\partial u^{\gamma} \partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^\beta \dots \partial \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}} \right) \right]^2 dx_1 \dots dx_n \leq M,$$

il y a une solution unique de (2) satisfaisant aux condition (1') pourvu que l'on ait

$$\int \cdots \int_D \left[ \frac{\partial_{u_0}^q}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]^2 dx_1 \cdots dx_n \leq M, \quad \int \cdots \int_D \left[ \frac{\partial^{q-1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]^2 dx_1 \cdots dx_n \leq M,$$

$$q = 0, 1, \dots \left[ \frac{n}{2} \right] + 3.$$

B. Hostinský (Brünn).

Sicardi, Francesco: Unicità della soluzione di un'equazione a derivate parziali del 4° ordine a caratteristiche multiple. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 331—334 (1939).

Für die Lösungen  $z(x, y)$  der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

in einem Gebiete  $\Gamma$ , das von einer Strecke  $a \leq x \leq \delta$  der Gerade  $y = \text{konst.}$  und von einem regulären ganz unterhalb dieser Gerade liegenden Bogen  $s$  begrenzt wird, leitet Verf. die folgende Formel ab

$$\frac{1}{2} \int_s \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 dx + 2 \iint_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_a^{\delta} \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx = 0;$$

daraus folgt, daß eine Lösung  $z$ , die samt ihren ersten Ableitungen auf  $s$  verschwindet, identisch in  $\Gamma$  verschwinden muß.

G. Cimmino (Cagliari).

Sakurai, Tokio: On the uniqueness theorem of solution of  $[\Delta + (\omega/v) \partial/\partial \theta] \Delta \psi = 0$ . Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 140—142 (1939).

Es wird gezeigt, daß die Lösung der Gleichung eindeutig ist, wenn  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  am Rande gegeben sind und außerdem  $\int_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta + \frac{\omega}{v} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi ds = 0$  ist.

T. Gustafson (Lund).

### Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

● Frazer, R. A., W. J. Duncan and A. R. Collar: Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations. Cambridge: Univ. press 1938. XIII, 416 pag. bound 30/-.

Dieses Buch stellt eine Einführung in den Gebrauch der Matrizen für den angewandten Mathematiker dar. Die ersten drei Kapitel bringen diejenigen Teile der Theorie der Matrizen mit reellen oder komplexen Elementen, die für die den größeren Teil des Buches ausmachenden Anwendungen gebraucht werden: Die Rechenoperationen, Rang von Matrizen, lineare Substitutionen, bilineare und quadratische Formen, unendliche Reihen von Matrizen,  $\lambda$ -Matrizen, charakteristische Matrix, Eigenwerte und Eigenvektoren von Funktionen einer Matrix, Äquivalenz von Matrizen, Teile der Elementarteilertheorie. Kapitel IV bringt eine Reihe numerischer Methoden zur Reziprokenbildung, zur Lösung linearer Gleichungen und zur iterativen Bestimmung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Den zweiten Teil des Buches bildet eine ausführliche Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und nach einer Einführung in die Systemmechanik Anwendungen vor allem auf Schwingungsprobleme. Das Buch schließt mit einer ausführlichen Darstellung eigener Untersuchungen der Verf. über das „Flattern“ von Flugzeugteilen. Jeder Abschnitt enthält eine große Zahl von durchgerechneten numerischen Beispielen. — Kapitelüberschriften: I. Fundamental Definitions and Elementary Properties. II. Powers of Matrices, Series, and Infinitesimal Calculus. III. Lambda-Matrices and Canonical Forms. IV. Miscellaneous Numerical Methods. V., VI. Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients. VII. Numerical Solutions of Linear Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients. VIII. Kinematics and Dynamics of Systems. IX. Systems with Linear Dynamical Equations. X. Iterative Numerical Solutions of Linear Dynamical Problems. XI. Dynamical Systems with Solid Friction. XII. Illustrative Applications of Friction

Theory to Flutter Problems. XIII. Pitching Oscillations of a Frictionally Constrained Aerofoil.

G. Köthe (Münster).

● **McLachlan, N. W.:** Complex variable and operational calculus with technical applications. Cambridge: Univ. press 1939. 25/-.

Die Darstellung gliedert sich in 4 Teile. Im ersten (112 S.) wird das rein funktionentheoretische Rüstzeug der Residuenrechnung eingehend dargestellt und im Hinblick auf die beabsichtigten Anwendungsfälle systematisiert; die Verlagerung von Integrationswegen und die Hauptfälle des zugehörigen Konvergenzverhaltens der wichtigen Integraltypen werden zu festen Regeln für den Benutzer straff gefaßt; überdies findet sich hier eine kurze Einführung der speziellen Funktionen. Der zweite Teil (50 S.) behandelt die Grundgedanken des Operatorenkalküls; der Verf. stützt sich dabei auf die weitreichenden Verallgemeinerungen der Integralformeln von H. J. Mellin (über Zuordnung der Exponential- und Gammafunktion. Math. Ann. 68) und faßt den Operator als Integrationsveränderliche in solchen Integralumkehrformeln auf, die eine Zuordnung einer „Funktion“ zu einer zweiten, ihrer „operationalen Form“, bewirken. Erst nachträglich wird die Auffassung von  $p = \frac{d}{dt}$  als Operator besonders gerechtfertigt. (Durch dieses Vorgehen wird die in technischen Kreisen verbreitete Operatorenmystik ausgeschaltet.) Nach Einführung der daraus entspringenden Behandlungsverfahren gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen wird als wesentliches Hilfsmittel die Heavisidesche Sprungfunktion (unit function) eingehend diskutiert. — Der dritte Teil (120 S.) bringt eine reiche Fülle zeitgemäßer technischer Anwendungen sowohl in bezug auf gewöhnliche wie partielle Differentialgleichungen, z. B. über Flugzeugdynamik, Torsionsschwingungen, Lautsprecher, Mikrophone, elektr. Wellenfilter u. a. m. Die mathematische Durchführung setzt volle Vertrautheit mit Teil I und II voraus, ist aber ausführlich genug gehalten. — Der vierte Teil endlich gibt anhangsweise Ergänzungen, die z. T. den Wünschen der Mathematiker entgegenkommen: so eine Reihe von Hilfssätzen, eine Skizze über asymptotische Reihen, Beweise einzelner wichtiger Sätze, Konvergenzfragen; es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Redeweise in bezug auf solche Fragen und Grenzübergänge in Teil I, II zwar stellenweise knapp, aber gleichwohl mathematisch einwandfrei ergänzbar gehalten ist. — Das Buch ist mit zahlreichen Beispielen ausgestaltet; im Text zur Klärung des theoretischen Materials und am Schlusse für die Eigentätigkeit des Lesers. Das ausführliche Schriftenverzeichnis bietet zusammen mit den gründlichen Verweisen im Text einen wertvollen Führer.

Ulrich (Gießen).

**McLachlan, N. W.:** Application of the Mellin inversion theorem to impulses. Math. Gaz. 23, 270—277 (1939).

Eine Reihe einfacher Beispiele für die Verwendbarkeit der Mellinschen Umkehr-

formel  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \Phi(z) \frac{dz}{z}$  der Operatorenrechnung. G. Köthe (Münster).

● **L'istituto nazionale per le applicazioni del calcolo nel quadriennio 28. ottobre 1933—27. ottobre 1937.** Prefazione di S. E. Umberto Pupini. (Pubbl. d. Ist. Naz. p. le Applicaz. d. Calcolo Nr. 27.) Roma: Selbstverl. 1938. XVIII, 133 pag.

Das vor vier Jahren begründete Nationale Institut für angewandte Mathematik in Rom, das wohl einzigartig in der Welt dasteht, hat sich die Aufgabe gestellt, die vielen mathematischen Probleme, die durch den gewaltigen Aufschwung von Wirtschaft und Technik bedingt sind, einheitlich, von einem Zentrum aus zu bearbeiten. Das Institut umfaßt einen großen Stab von bedeutenden Wissenschaftlern aus allen Disziplinen der reinen und angewandten Mathematik. Das vorliegende Werk gibt einen Überblick über die geleistete wissenschaftliche Arbeit. — Die verschiedensten Probleme der mathematischen ebenen und räumlichen Elastizitätstheorie (Spannungen in Platten, Prismen, Gewölben, Schalen usw.) wurden wirksamst angegriffen. Das von Picone angegebene Approximationsverfahren zur Lösung von Variationsproblemen sowie die von ihm entwickelten Methoden zur Lösung von Systemen partieller Differentialgleichungen mit Randbedingungen erwiesen sich als besonders fruchtbar. Schon

bei einer geringen Anzahl von Schritten konnten dadurch bei den verschiedenen Problemen für die Praxis hinreichend gute Annäherungen geliefert werden. (Dieses Verfahren ist in vielen Fällen vorteilhafter als das bekannte Ritzsche Verfahren, das einen Spezialfall des Piconeschen Verfahrens darstellt). Die dabei notwendigen Auflösungen von linearen Gleichungssystemen mit einer großen Zahl von Unbestimmten wurden für die praktische Berechnung von verschiedenen Mitarbeitern des Institutes durch besondere (neue) Iterationsverfahren durchgeführt. Es wurden ferner verschiedene Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen (besonders auch nichtlinearen) entwickelt, wie sie in der Schwingungslehre (z. B. Schwingungen von Stäben, Platten, Brücken, Bauwerken, Tragflügeln, Schwingungen in Flüssigkeiten usw.) auftreten. Auf Grund von Variationsmethoden wurden Verfahren zur Integration partieller Differentialgleichungen angegeben, die im Gegensatz zu den bekannten Methoden der Laplacetransformation, Reihenentwicklung usw. sehr schnell definitive Ergebnisse liefern. Die von Picone entwickelten Integrationsmethoden für Systeme partieller Differentialgleichungen mit den verschiedensten Anfangs- oder Randbedingungen fanden Verwendung bei Problemen der Wärmelehre, Optik und Elektrotechnik. Die diophantischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Probleme, wie sie sich in der Betriebswirtschaft, Statistik und Finanzwirtschaft ergeben, wurden von dem Institut mit Erfolg behandelt. Auch die Tabellierung von Funktionen, wie sie z. B. in der Flugwissenschaft häufig gebraucht werden, wurde vorgenommen. — Das Buch enthält außerdem ein Verzeichnis der zahlreichen aus dem Institut hervorgegangenen Publikationen sowie Beurteilungen von maßgebenden Persönlichkeiten des Staates, der Wissenschaft und Technik, die die wirklich außerordentlichen Leistungen des Institutes auf allen Gebieten würdigen.

Wegner (Heidelberg).

**Conforto, Fabio:** *Sopra un complemento all'equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente.* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 18, 107—145 (1939).

Aufstellung der Dreimomentengleichungen (Clapeyronsche Gleichungen) für durchlaufende Balken, die in jedem Felde eine linear veränderliche Steifigkeit  $EJ$  haben, durch eine konstante Streckenlast und eine beliebige Anzahl von Einzellasten in der Querrichtung belastet sind und außerdem in der Längsrichtung durch bekannte Kräfte gedrückt oder gezogen sind. Wegen der linear veränderlichen Steifigkeit enthalten die Koeffizienten der Gleichungen Besselsche Funktionen. Es wird gezeigt, daß die numerische Berechnung der Koeffizienten mit denselben numerischen Hilfsmitteln erfolgen kann wie in dem Fall, in dem die Einzellasten fehlen. Die hierfür geltenden Zahlentafeln werden in einer folgenden Arbeit gegeben. Th. Pöschl (Karlsruhe).

**Sen, Bibhutibhusan:** *Direct determination of stresses from the stress equations in some two-dimensional problems of elasticity. II. Thermal stresses.* Philos. Mag., VII. s. 27, 437—444 (1939).

Erweiterung der für zweidimensionale Elastizitätsprobleme abgeleiteten Integralgleichungen (Philos. Mag., VII. s. 26, 98) auf den Spannungszustand. Nach Aufstellung der thermoelastischen Grundgleichungen werden sowohl für stationäre als auch für instationäre Zustände allgemeine Lösungsansätze beschrieben. Voraussetzung ist hierbei die Differentialgleichung der Wärmeleitung, d. h. keine Wärmezufuhr im Innern des betrachteten Gebietes, ferner konstante Wärmeleitfähigkeit usw. Spezielle Lösungen werden für die Halbscheibe und den Kreiszylinder angegeben. H. Neuber.

**Oseen, C. W.:** *Sur une équation aux dérivées partielles dans la théorie du mouvement d'un corps plastique.* Ark. Mat. Astron. Fys. 26 B, Nr 15, 1—4 (1938).

Le problème du mouvement d'un corps plastique conduit dans le cas où le mouvement se fait dans un plan à un système de deux équations. Ce système se ramène par une transformation de Bäcklund [voir C. W. Oseen, Ark. Mat. Astron. Fys. 24 (1934); ce Zbl. 8, 358] au système plus simple suivant

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \cos \varphi - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \sin \varphi = 0; \quad (1) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2^2} + \cot \varphi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (2)$$

Afin de donner à (1) une forme plus simple l'auteur avait employé la transformation ( $\alpha, \beta$  sont nouvelles variables indépendantes)

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \beta} = \cot \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}.$$

Il montre maintenant comment cette transformation peut être obtenue par la considération des caractéristiques. L'équation transformée qui remplace (1) s'écrit

$$\frac{4}{\sin \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

L'auteur trouve ainsi une solution du système proposé dépendant de quatre fonctions arbitraires.

*B. Hostinský* (Brünn).

**Klose, A.: Räumliche Potentialströmung.** Deutsche Math. 4, 325—339 (1939).

Die stationäre Strömung um eine geschlossene Fläche läßt sich bekanntlich durch das Strömungsfeld einer bestimmten Quellenverteilung auf dieser Fläche darstellen. Setzt man für das Strömungspotential  $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r} + \varphi_1(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{v}_0$  = gleichförmiges Geschwindigkeitspotential) an, wobei die Potentialfunktion  $\varphi_1(\mathbf{r})$  im Unendlichen wie  $\frac{1}{r}$  verschwindet, so ergibt sich aus der Integraldarstellung von  $\varphi_1(\mathbf{r})$  mittels der noch unbekannten Flächenbelegungsfunktion  $\mu(\mathbf{y})$  durch Grenzübergang zu Punkten der Oberfläche für die Geschwindigkeit eine Integralgleichung, die in die Grenzbedingung: „Normalkomponente der gesamten Strömung gleich Null an der Oberfläche“ eingesetzt, eine inhomogene Integralgleichung für  $\mu(\mathbf{y})$  liefert. Verf. betrachtet nun Strömungen um Flächen von der Form  $\mathbf{r} + \varrho \mathbf{r}^*(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ , wobei  $\varrho$  ein kleiner Strömungsparameter ist und zeigt (bei Beachtung gewisser Forderungen über  $\mathbf{r}^*$ ) u. a. auf Grund der Theorie der Integralgleichungen, daß der Unterschied der Belegungsfunktion für  $\varrho = 0$  und kleinem  $\varrho$  einer Integralgleichung genügt, die gestattet, aus der Kenntnis der Strömung um  $\varrho = 0$  sofort den Koeffizienten des Gliedes  $\varrho^0$  und  $\varrho^1$  bei der Belegungsfunktion für die  $\varrho$ -Fläche anzugeben. Anwendungen auf Flächen, die beim ebenen Problem den Joukowskiprofilen entsprechen.

*Wegner* (Heidelberg).

**Barbanti, Alberto: Applicazione del metodo di Green a un problema di idrodinamica e ricerca delle funzioni di Green, Neumann e miste di alcuni domini col metodo delle immagini.** Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 75, 97—156 (1939).

Nello studio delle piccole oscillazioni di un liquido occupante un volume  $S$  limitato in parte da una parete solida  $\omega'$  e in parte da una superficie libera  $\omega$  a pressione costante si è condotti a considerare per il potenziale di spostamento  $\Phi(x, y, z, t)$  il seguente problema al contorno

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{su } S, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \text{su } \omega, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \omega', \quad (1)$$

designando  $\lambda$  una costante ed  $n$  la normale al contorno di  $S$ . — Il Volterra ha mostrato che, assegnati i valori iniziali di  $\Phi$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , detta funzione incognita  $\Phi$  resta univocamente determinata e può essere espressa per mezzo di un integrale superficiale in cui figura un'opportuna funzione di Green. L'A. del presente lavoro si occupa dell'estensione del predetto teorema di unicità a qualche problema di tipo più generale del problema (1) e della costruzione della funzione di Green per il problema (1), nel caso in cui  $S$  sia una sfera, un cilindro, una semisfera, uno specchio sferico etc. Taluni dei risultati di questa ultima parte lasciano adito a qualche dubbio.

*C. Miranda* (Genova).

**Schultze, Johann Friedrich: Über unstetige Flüssigkeitsbewegungen um vorgegebene Profile.** Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 4, 143—180 (1939).

Si sa che il calcolo della risultante delle pressioni che un profilo rigido subisce da parte di una corrente fluida piana indefinita può esser fatto seguendo il metodo della scia del Levi-Civita. Questo metodo fa corrispondere ad ogni funzione  $\Omega(\zeta)$  della variabile complessa  $\zeta$  regolare entro un cerchio, avente ivi particolari caratteristiche, una corrente ed un profilo determinati. In questa monografia l'Autore riprende un'idea del Quarleri (1931), espressa nel caso di un profilo circolare, secondo la quale, eliminando la parte reale della funzione  $\Omega(\zeta)$ , il problema di calcolare la  $\Omega(\zeta)$  è ricondotto ad un'equazione integrale non lineare, la cui incognita è il coefficiente dell'immaginario in  $\Omega(\zeta)$ . Un metodo di iterazione applicato a questa permette di

risolvere il problema nel caso circolare, conducendo fino ai calcoli numerici la valutazione della resistenza. *G. Lampariello* (Roma).

**Vernotte, Pierre:** *L'intégration des équations aux dérivées partielles de la physique. Application à la chaleur et à la mécanique des fluides. Une solution particulière. Les limites de son emploi.* C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1712—1713 (1939).

Verf. untersucht die partiellen Differentialgleichungen, welche, wie z. B. die Wärmeleitungsgleichung, Lösungen der Gestalt  $f\left(\frac{z^m}{x}\right)$  besitzen. *W. Glaser.*

**Churchill, R. V.:** *On the problem of temperatures in a non-homogeneous bar with discontinuous initial temperatures.* Amer. J. Math. **61**, 651—664 (1939).

In questo lavoro si considera il seguente problema al contorno:

$$U_{xx}(x, t) - q(x) U(x, t) = U_t(x, t), \quad (0 < x < 1), t > 0)$$

$$U(x, +0) = F(x), \quad (0 < x < 1)$$

$$U(+0, t) = U(1 - 0, t) = 0, \quad (t > 0)$$

dove  $q(x)$  è supposta continua e  $F(x)$  continua a tratti, con derivata prima limitata e integrabile, nell'intervallo  $(0, 1)$ . Col noto metodo della trasformazione di Laplace si stabilisce dapprima l'esistenza di una soluzione per la quale vengono assegnate due espressioni equivalenti, la prima sotto forma di integrale e l'altra sotto forma di sviluppo in serie di soluzioni elementari. Nell'ulteriore ipotesi che  $F'(x)$  e  $F''(x)$  siono continue a tratti e  $q'(x)$  e  $f'''(x)$  limitate e integrabili in  $(0, 1)$ , si dimostra anche che la predetta soluzione è l'unica che goda delle seguenti proprietà: a)  $U$  e  $U_x$  sono continue superficialmente nell'insieme  $0 \leq x \leq 1, t > 0$  e  $U_t$  nell'insieme  $x \in I, t > 0$ , designando  $I$  l'intervallo  $(0, 1)$  privato dei punti (in numero finito) di discontinuità per  $F, F'$  e  $F''$ . b) Per ogni  $t_0 > 0, |U|$  è uniformemente limitato per  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_0$  e  $|U_t|$  per  $x \in I', 0 \leq t \leq t_0$ , designando  $I'$  un qualunque insieme chiuso contenuto in  $I$ ;

inoltre l'integrale  $\int_0^{t_0} |U_x| dt$  è convergente per ogni  $x$  e infinitesimo per  $t_0 \rightarrow 0$ , uniformemente rispetto a  $x$ .

*C. Miranda* (Genova).

**Solovieff, P. V.:** *Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung.* C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **23**, 132—134 (1939).

Berechnung einer Funktion  $G(x, y; \zeta, \eta)$ , die den beiden partiellen Differentialgleichungen  $\partial^2 G / \partial x^2 - \partial G / \partial y = 0$  und  $\partial^2 G / \partial \zeta^2 + \partial G / \partial \eta = 0$  genügt, und gewissen Randbedingungen in dem Trapez, das durch die Geraden  $y = 0, y = h$  und  $x = k_1 y, x = k_2 y + b$  begrenzt ist.

*J. Meixner* (Gießen).

**Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger:** *On Green's functions in the theory of heat conduction.* Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 407—413 (1939).

The authors correct Lowan's solution of the conduction problem for a cylindrical solid bounded internally by  $r = a$ , radiation taking place at  $r = a$  into a medium at zero temperature. The problem is treated afresh first by contour integration in which the temperature  $v$  is put in the form  $u + w$  where  $u$  is the temperature for a line source at  $r', \theta'$  and  $w$  is given by an equation of type

$$4nw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\theta \int \alpha e^{-k\alpha^2 t} A_n(\alpha) H_n^{(1)}(\alpha r') H_n^{(1)}(\alpha r) d\alpha$$

the path of integration being something like a branch of a hyperbola in the upper half of the  $\alpha$ -plane. The temperature  $u$  is expressed by an integral of a similar type but with an ordinary Bessel function in place of one the Hankel functions. It is proved, moreover, that there are no zeros of  $\alpha H_n^{(1)'}(\alpha a) - h H_n^{(1)}(\alpha a)$  for which the imaginary part of  $\alpha$  is positive or zero. Two transformations of the solution are then given first by replacing the integrals by integrals running from  $-\infty$  to  $+\infty$  and secondly by

integrals running from 0 to  $\infty$ . — In the second treatment the notation  $\bar{u}_n = \int_0^\infty e^{-pt} u_n dt$

is used for the Laplace transformation and the functions  $\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n$  corresponding to the functions  $u_n, v_n, w_n$  are expressed in terms of Bessel functions  $I_n(kr), K_n(k\theta)$   $u_n, v_n, w_n$  being the coefficients in cosine series of type  $u = \sum u_n \cos n\theta$ . The solution is then completed with the aid of an inversion formula for integrals of Laplace's type.

H. Bateman (Pasadena).

**Müller, Paul Otto: Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip für beliebige Dimensionszahl.** (Inst. f. Theoret. Physik, Univ. Graz.) Physik. Z. 40, 428—435 (1939).

Verf. beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Huygens-Kirchhoffschen Prinzip für die  $n$ -dimensionale Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ . Ihre kugelsymmetrische Lösung wird durch  $v = \varrho^{-s} Z_s(\varrho)$  gegeben, wo  $\varrho = kr$ ,  $s = n/2 - 1$  und  $Z_s$  eine Besselsche Funktion von der Ordnung  $s$  ist. Setzt man in dem  $n$ -dimensionalen Greenschen Satz  $\int_R (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \int_F \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} v \right) df$ ,  $u$  gleich der Funktion, die den betrachteten Wellenvorgang darstellt, und  $v$  gleich der obigen kugelsymmetrischen Lösung, in der jedoch für  $Z_s$  eine im Punkte  $\varrho = 0$  singuläre Besselsche Funktion gewählt wird, so kann man  $u$  innerhalb der geschlossenen Fläche  $F$  durch die Randwerte von  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  auf  $F$  darstellen. Verf. wählt nun im Falle gerader  $n$  für  $Z_s$  die Neumannsche Funktion  $Y_s$  und im Falle ungerader  $n$  die Besselsche Funktion  $J_{-s}$ . Beide Funktionen sind aber für reelle  $\varrho$  reell und stellen daher (nach Multiplikation mit dem Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$ ) stehende und nicht, wie dies das H.-K.-Prinzip fordert, fortschreitende Wellen dar (die durch die Hankelschen Funktionen wiedergegeben werden). Infolgedessen muß auch der Versuch des Verf., dem H.-K.-Prinzip in der von ihm benutzten Fassung die Retardierung der Elementarwellen aufzupropfen, als gescheitert angesehen werden.

Verf. deutet an, daß der Übergang zum H.-K.-Prinzip für die Wellengleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$  mittels des Fourierschen Integralsatzes vollzogen werden kann, ohne jedoch (mit Ausnahme des eindimensionalen Falles) zur Lösung in expliziter Form vorzudringen.

Rubinowicz (Lemberg).

### Funktionalanalysis, Ergodenprobleme:

**Picone, M.: Sopra un problema di calcolo funzionale.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 155—159 (1939).

Es seien:  $A$  ein meßbarer Bereich von  $S_r$ ;  $x, y$  zwei seiner erzeugenden Punkte;  $K(x, y)$  ein reeller, symmetrischer, quadratisch summierbarer, positiv definiter Kern;  $f(x)$  eine reelle, quadratische summierbare Funktion in  $A$ . Verf. stellt sich zur Aufgabe, die untere Grenze des Funktionals

$$P[\varphi] = \iint_{A, A} K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy - 2 \int_A f(x) \varphi(x) dx$$

zu bestimmen, wenn  $\varphi(x)$  in der Gesamtheit der quadratisch summierbaren Funktionen in  $A$  variiert. — Bezeichnen:  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  die Eigenwerte von  $K(x, y)$ ,  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  die zugehörigen orthogonalisierten und normierten Eigenlösungen,  $a_1, a_2, \dots$  die Fourierkoeffizienten von  $f(x)$  nach diesem System, so erhält das Ergebnis

des Verf. folgende Gestalt: Gilt, im Sinne der Konvergenz im Mittel,  $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ , (1),

so ist die untere Grenze des Funktionals  $P(\varphi)$  gleich  $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n$  (endlich oder unendlich);

notwendig und hinreichend, damit dies auch ein Minimum sei, ist die Konvergenz der

Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n^2$ . Ist diese Bedingung erfüllt, so wird das Minimum für  $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \varphi_n$

erreicht. Ist (1) nicht erfüllt, so hat  $P[\varphi]$  die untere Grenze  $-\infty$ . — Aus diesem Satz läßt sich unschwer das bekannte Picardsche Kriterium für die Auflösbarkeit einer Integralgleichung 1. Art herleiten.

C. Miranda (Genova).

**Picone, Mauro:** L'estremo inferiore di un certo funzionale. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 1, 198—199 (1939).

Verf. bestimmt die untere Grenze des Funktionals

$$J[\varphi] = \int_A \left| \int_B K(x, y) \varphi(y) dy - f(x) \right|^2 dx$$

für alle in  $B$  quadratisch integrierbaren  $\varphi(y)$ . Sind  $u_\nu(x)$ ,  $v_\nu(y)$  die normierten Eigenfunktionen von  $K(x, y)$  in  $A$  bzw.  $B$ ,  $\lambda_\nu$  die entsprechenden Eigenwerte, und gilt im Sinne des quadratischen Mittels

$$F(x) \sim f(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u_\nu(x), \quad a_\nu = \int_A f(x) \bar{u}_\nu(x) dx,$$

so ist jene untere Grenze gleich  $\int_A |F(x)|^2 dx$ , und eine Minimalfolge wird von den Funktionen  $\varphi_\nu(y) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k a_k v_k(y)$  gebildet. Harald Geppert (Gießen).

**Nakano, Hidegorô:** Zur Eigenwerttheorie normaler Operatoren. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 315—339 (1939).

Eine neue Begründung der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren im komplexen Euklidischen Raum  $\mathfrak{E}$  beliebiger Dimension.  $N$  sei ein unbeschränkter abgeschlossener normaler Operator. In Verallgemeinerung einer Idee von B. A. Lengyel und M. H. Stone [Ann. of Math., II. s. 37, 853—864 (1936); dies. Zbl. 16, 30] wird der abgeschlossene lineare Teilraum  $M_{z,r}$  von  $\mathfrak{E}$  betrachtet, der aus allen  $f$  besteht, für die  $N^{k_1} N^{*k_2} \dots N^{*k_n} f$  stets sinnvoll ist und für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{N-z}{r} \right)^n f \right| < \infty$  ist,  $z$  eine feste komplexe Zahl. Zu  $M_{z,r}$  gehört ein mit  $N$  vertauschbarer Projektionsoperator  $P(r)$ . Aus der Gesamtheit dieser den Kreisen  $C_r$  mit den Mittelpunkt  $z$  und den Radien  $r$  der komplexen Zahlenebene  $G$  zugeordneten Projektionsoperatoren läßt sich die zu  $N$  gehörige Spektralschar  $E(Z)$  und daraus die Darstellung  $(Nf, g) = \int_G z d(E(Z)f, g)$  gewinnen, falls  $N$  hypermaximal ist, d. h., wenn  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(\bar{C}_r)$  gleich dem Einheitsoperator  $E$  von  $\mathfrak{E}$  ist. Für beschränkte unitäre und Hermitesche Operatoren folgt daraus sofort die Spektraldarstellung. Für beliebige selbstadjungierte Operatoren  $H$  muß noch durch Einführung von  $(H + iE)^{-1}(H - iE)$  die Hypermaximalität im obigen Sinne bewiesen werden. G. Köthe (Münster i. W.).

**Plessner, A.:** Über Funktionen eines maximalen Operators. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 23, 327—330 (1939).

Fortsetzung einer früheren Note [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 22, 227—230 (1939); dies. Zbl. 20, 369].  $A$  sei ein maximaler Operator. Mit Hilfe eines  $A$ -Maßes lassen sich für die beschränkten  $A$ -meßbaren reellen Funktionen  $F(\xi)$  die Funktionen

$$F(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) dE(A_\xi)$$

analog wie bei hypermaximalen Operatoren einführen. Auch für gewisse unbeschränkte  $F(\xi)$  gilt dies. Die Zuordnung  $F(\xi) \rightarrow F(A)$  ist linear, aber nicht mehr multiplikativ.  $G(A)F(A)$  ist im allgemeinen  $\neq F(A)G(A)$  und nicht mehr Funktion von  $A$ . Es wird aber ein engerer Bereich von Funktionen  $F(\xi)$  angegeben, der z. B. alle in einer Halbebene beschränkten analytischen Funktionen enthält, in dem die zugehörigen  $F(A)$  noch einen Abelschen Ring bilden. Weitere Sätze über diese Funktionen, z. B. über die Existenz von  $F^{-1}(A)$ . Ohne Beweise. G. Köthe (Münster i. W.).

**Tychonoff, A.:** Sur les équations fonctionnelles de Volterra et leurs applications à certains problèmes de la physique mathématique. Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. 1, Fasc. 8, 1—25 (1938).

Un opérateur fonctionnel  $V(t; \varphi)$  sera appelé opérateur fonctionnel de Volterra si sa valeur est déterminée par les valeurs de la fonction  $\varphi(\tau)$  dans l'intervalle  $0 \leq \tau < 1$ .

L'auteur étudie les équations du type  $\varphi(t) = V(t; \varphi)$ . Pour résoudre une telle équation il emploie la méthode d'approximations successives du type de Picard et la méthode des approximations polygonales du type de Cauchy-Lipschitz; il étudie les conditions qu'il faut imposer à l'opérateur  $V(t; \varphi)$  pour que les approximations convergent vers la solution. Il considère aussi le cas d'un système de  $n$  équations contenant  $n$  opérateurs fonctionnels de Volterra. Dans le cas de deux opérateurs nous avons le système

$$\varphi^{(1)}(t) = V_1(t; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}); \quad \varphi^{(2)}(t) = V_2(t; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$$

où les opérateurs  $V_1$  et  $V_2$  dépendent de  $t$  et des valeurs que prennent les fonctions inconnues  $\varphi_1(\tau)$  et  $\varphi_2(\tau)$  dans l'intervalle  $0 \leq \tau < t$ . Un système d'équations à  $n$  opérateurs peut être ramené à une seule équation contenant un seul opérateur. — L'auteur applique la théorie de ces équations à la résolution du problème suivant: Déterminer le refroidissement d'un système de  $n$  corps homogènes  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) qui se trouvent dans un mouvement dont la loi nous est connue sous les hypothèses suivantes: Si  $u_i(P_i, t)$  est la température du point  $P_i$  du corps  $T_i$  à l'époque  $t$ , les fonctions  $f_i(P_i, t; u_i(P_i, t))$  qui définissent la loi du rayonnement au point  $P_i$  de la surface  $S_i$  de  $T_i$  dépendent non seulement de  $u_i(P_i, t)$  mais encore de la position du point  $P_i$  et du temps  $t$ . Nous supposons que chaque point d'un corps quelconque  $T_i$  absorbe de la chaleur émanée par les surfaces des autres corps et que d'ailleurs un certain flux de chaleur vient de l'espace qui entoure ces corps. Le flux de chaleur reçu au point  $P_i$  de  $S_i$  est une fonctionnelle connue de  $u_k(P_k, \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) qui peut dépendre du point  $P_i$  et de  $t$ :  $V_i(P_i, t; u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Le problème consiste à trouver  $n$  fonctions  $u_i$  telles que

$$\Delta u_i = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

à l'intérieur de  $T_i$  et que l'on ait, pour  $t = 0$ , dans  $T_i$

$$u_i(P_i, 0) = \psi_i(P_i),$$

$\psi_i$  étant des fonctions données; il faut de plus que

$$k_i \frac{\partial u_i}{\partial n}(P_i, t) = f_i(P_i, t, u_i(P_i, t)) - V_i(P_i, t; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

sur la surface  $S_i$  de  $T_i$ . L'auteur montre comment ce problème se réduit à une équation fonctionnelle qui admet une solution unique. — Il donne enfin la démonstration du théorème suivant: Pour chaque domaine borné qui est un domaine fondamental (voir Tychonoff, Bull. Univ. État Moscou Sect. A, Fasc. 9) pour l'équation de la chaleur, le premier problème aux limites pour l'équation  $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = F(P, t; u)$  admet une solution dans un certain intervalle  $0 \leq t \leq t_0$ ;  $F$  est un opérateur donné.

B. Hostinský (Brünn).

Wiener, Norbert: The ergodic theorem. Duke math. J. 5, 1—18 (1939).

In der vorliegenden Arbeit werden folgende Sätze aufgestellt und bewiesen.  $\Omega$  sei ein Raum von Punkten  $P$ ,  $m$  ein Lebesguesches Maß in ihm,  $T$  eine eindeutige  $m$ -treue Abbildung von  $\Omega$  auf sich [die in der Arbeit gemachte Voraussetzung  $m(\Omega) < \infty$  ist unnötig und wird gar nicht benutzt]. Neben einem einzelnen  $T$  wird auch eine meßbare kontinuierliche Gruppe  $T^\lambda$  von solchen  $T$ ,  $T^\lambda T^\mu = T^{\lambda+\mu}$ , betrachtet.  $f(P)$  sei ferner eine nichtnegative,  $m$ -summierbare Funktion auf  $\Omega$ . Man setze etwa

$$f_A(P) = \frac{1}{A} \sum_{r=0}^{A-1} f(T^r P) \quad \text{resp.} \quad f_A(P) = \frac{1}{A} \int_0^A f(T^\lambda P) d\lambda.$$

Dann gilt in beiden Fällen: Das  $m$ -Maß der Menge derjenigen Punkte  $P$ , in welchen

$$\lim_{A \rightarrow \infty} f_A(P) > \alpha \quad (\alpha > 0) \quad (1)$$

gilt, ist höchstens gleich

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f(P) dm. \quad (2)$$

Ähnliche Sätze sind schon in der Birkhoffschen Beweisführung seines Ergodensatzes enthalten. Ist  $T^{\lambda_1} T^{\lambda_2} \dots T^{\lambda_k}$  eine kontinuierliche Gruppe von Abbildungen  $T$ ;  $\Pi T_i^{\lambda_i} \Pi T_j^{\mu_j} = \Pi T_i^{\lambda_i + \mu_i}$ , und setzt man diesmal

$$f_A(P) = \frac{1}{V(\sum \lambda_i^2 < A^2)} \int \dots \int f(T_1^{\lambda_1} \dots T_k^{\lambda_k} P) d\lambda_1 \dots d\lambda_k,$$

so beweist Verf. analog, daß das Maß aller  $P$  mit (1) höchstens gleich (2) mal  $C_k$  ist, wo  $C_k > 0$  nur von der Dimensionszahl  $k$  der Gruppe abhängt. — Bemerkenswert sind die Spezialfälle, die man erhält, wenn man im diskreten Fall  $\Omega$  mit der Menge aller ganzen Zahlen  $n$  identifiziert (Maß = 1 für jede Zahl),  $T(n) = n + 1$ , und im kontinuierlichen Fall ( $k = 1$ ) mit der  $x$ -Geraden,  $dm = dx$ ,  $T^\lambda(x) = x + \lambda$ . Es gelingt Verf., einen einfachen Beweis des allgemeinen Satzes auf Grund dieser (elementar beweisbaren) Spezialfälle zu führen. — Die Bedeutung dieser Sätze liegt nun darin, daß sich mit ihrer Hilfe in natürlicher Weise erstens der Birkhoffsche Ergodensatz:  $\lim_{A \rightarrow \infty} f_A(P)$  existiert für fast alle  $P$ ; zweitens der Fundamentalsatz der Integralrechnung:

$\lim_{A=0} f_A(P) = f(P)$  für fast alle  $P$ , beweisen lassen, und daß damit der erstere Satz in

einen breiteren Zusammenhang eingeordnet erscheint. Die Einwände, die Ref. bei früheren Beweisskizzen des Verf. erhoben hat (dies. Zbl. 19, 354), werden durch die vorliegende Arbeit hinfällig. Jene Sätze werden hier auf die entsprechenden Sätze für Konvergenz im Mittel zurückgeführt, welche sich in naheliegender Weise beweisen lassen.

E. Hopf (Leipzig).

**Birkhoff, Garrett: The mean ergodic theorem.** Duke math. J. 5, 19—20 (1939).

Mit  $f$  seien die Elemente eines gleichmäßig konvexen Banachraumes (jede Funktionenklasse  $L^p$ ,  $p > 1$  stellt einen solchen Raum dar) und mit  $T$  ein linearer Operator in ihm mit der Eigenschaft  $|Tf| \leq |f|$  bezeichnet. Dann wird bewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n; \quad f_n = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} T^r f,$$

existiert für jedes  $f$ . Der Konvexitätsbegriff und die Tatsache, daß die untere Grenze der Normen  $|f_n|$  gleich ihrem unteren Limes ist, ermöglichen einen sehr kurzen Beweis.

E. Hopf (Leipzig).

**Dunford, Nelson: An ergodic theorem for  $n$ -parameter groups.** Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 25, 195—196 (1939).

Ankündigung von Verallgemeinerungen des v. Neumannschen Ergodensatzes in der Operatorenform auf Gruppen  $T_\alpha$ ,  $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ , wo  $\alpha$  die Vektoren des  $n$ -dimensionalen Vektorraumes durchläuft. Insbesondere: Ist  $S_\alpha(P)$ ,  $S_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$ , eine in  $(P, \alpha)$  meßbare Gruppe maßtreuer Abbildungen eines Raumes  $\Omega$  auf sich, und gehört  $f(P)$  in  $\Omega$  zur Klasse  $L^p$ ,  $p \geq 1$ , so existiert das  $\alpha$ -Mittel  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-n} \int_{Q_r} f(S_\alpha(P)) d\alpha$

( $Q_r$  = irgendein Kubus der Seitenlänge  $r$  im  $\alpha$ -Raum) im Sinne von  $L^p$ -Konvergenz in  $\Omega$ . Die Grenzfunktion gehört auch zu  $L^p$ .

E. Hopf (Leipzig).

**Grant, Anna: Surfaces of negative curvature and permanent regional transitivity.** Duke math. J. 5, 207—229 (1939).

Es wird bewiesen, daß auf einer geschlossenen Fläche negativer Krümmung die geodätische Strömung permanent transitiv ist, d. h. daß eine beliebige offene Teilmenge im Linienelementraum  $\Omega$  der Fläche sich nach genügend langer Zeit beliebig dicht über  $\Omega$  verteilt. Dies wurde im Fall konstanter negativer Krümmung zuerst von Hedlund bewiesen. Die Beweismethode ist eine Verallgemeinerung der von Hedlund und beruht auf der Betrachtung der „Horozykel“ auf der Fläche. Dieser bei Flächen konstanter negativer Krümmung geläufige Begriff läßt sich auf den allgemeineren Fall übertragen, ebenso wie zahlreiche Sätze über die Horozykel. Von diesen Sätzen wird in der nachfolgend referierten Arbeit von Hedlund Gebrauch gemacht. E. Hopf.

**Hedlund, Gustav A.:** The measure of geodesic types on surfaces of negative curvature. Duke math. J. 5, 230—248 (1939).

Es wird bewiesen, daß auf einer geschlossenen Fläche  $\mathfrak{F}$  mit überall negativer Krümmung fast alle geodätischen Linien quasiergodisch (transitiv) verlaufen. Das „fast alle“ ist im Sinne des gegenüber der geodätischen Strömung im Linienelementraum von  $\mathfrak{F}$  invarianten Lebesgueschen Maßes  $m$  verstanden. Dabei ist  $dm = do d\varphi$ ,  $do$  = Flächen-,  $d\varphi$  = Winkelement auf  $\mathfrak{F}$ . Auf offenen Flächen negativer Krümmung und mit hyperbolischen Öffnungstrichtern laufen jedoch fast alle Geodätischen ins Unendliche. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Krümmung  $K$  zwischen negativen Grenzen verbleibt, und daß ihre Richtungsableitung auf der Fläche beschränkt ist. — Ref. bemerkt, daß er vor einigen Monaten eine neue einfache Methode entdeckt hat, mit welcher er im 1. Falle die metrische Transitivität der geodätischen Strömung beweisen konnte.

E. Hopf (Leipzig).

**Hopf, Eberhard:** Beweis des Mischungscharakters der geodätischen Strömung auf Flächen der Krümmung minus Eins und endlicher Oberfläche. S.-B. preuß. Akad. Berlin 1938, 333—344.

Es sei  $f$  eine Fläche der konstanten Krümmung  $-1$  und endlicher Oberfläche, auf der jede geodätische Linie unbegrenzt fortsetzbar ist.  $\Omega$  sei der Raum der orientierten Linienelemente von  $f$ . Die Bewegung eines beliebigen Punktes von  $f$  längs einer beliebigen geodätischen Linie auf  $f$  mit der Geschwindigkeit Eins läßt sich als eine Strömung in  $\Omega$  auffassen. Das Volumelement  $dm = d\sigma d\varphi$  ( $d\sigma$  = Flächenelement auf  $f$ ,  $d\varphi$  = Winkelement) bleibt dabei invariant. Verf. hat schon bewiesen, daß diese Strömung in  $\Omega$  metrisch transitiv ist (vgl. dies. Zbl. 14, 83—84; die Arbeit ist abgedruckt auch in E. Hopf, Ergodentheorie. Erg. Math. V, 2). Nun wird gezeigt, daß diese Strömung sogar vom Mischungstypus im weiteren Sinne ist. D. h., man hat

$$\lim_{\beta - \alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left[ m(A_t B) - \frac{m(A)m(B)}{m(\Omega)} \right]^2 dt = 0,$$

wo  $A, B$  zwei beliebige meßbare Mengen in  $\Omega$  und  $A_t$  das Bild von  $A$  nach der Zeit  $t$  bedeuten. — Nach dem sog. zweiten Mischungssatz genügt es, hierzu zu zeigen, daß eine Eigenfunktion der Strömung notwendig fast überall konstant ist. — Verf. führt das Problem, wie a. a. O., auf ein Problem über Fuchssche Gruppen  $\mathfrak{G}$  zurück. Den Kern der Arbeit bildet der Beweis des folgenden Hilfssatzes: Es sei  $\mathfrak{G}$  eine Fuchssche Gruppe, deren Fundamentalebene in  $|z| < 1$  endlichen nichteuklidischen Flächeninhalt besitzt. Es sei ferner  $g(\eta_1, \eta_2)$  eine auf dem Torus  $|\eta_1| = |\eta_2| = 1$  definierte komplexwertige meßbare Funktion vom Betrage Eins und mit der Eigenschaft:  $g(S\eta_1, S\eta_2)/g(\eta_1, \eta_2)$  hängt für jedes  $S \in \mathfrak{G}$  nur von  $\eta_1$  ab. Dann ist  $g(\eta_1, \eta_2)$  für jedes  $\eta_1$ , das nicht einer gewissen Nullmenge auf  $|\eta_1| = 1$  angehört, fast überall auf  $|\eta_2| = 1$  konstant. — Der sehr elegante Beweis stützt sich auf potentialtheoretische Hilfsmittel. — Ref. bemerkt, daß der Mischungscharakter der betrachteten Strömung etwa gleichzeitig auch von G. A. Hedlund bewiesen wurde (vgl. dieses Zbl. 20, 403).

B. v. Sz. Nagy.

### Funktionentheorie:

**Walsh, J. L.:** Note on the location of zeros of the derivative of a rational function whose zeros and poles are symmetric in a circle. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 462—470 (1939).

Verf. beweist interessante Sätze für die Lage der Nullstellen der Derivierten  $r'(z)$  der rationalen Funktion

$$r(z) = \lambda \prod_{k=1}^m \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}, \quad |\alpha_k| < 1, \quad |\lambda| = 1.$$

Es gelten unter anderem die Sätze: Liegt die Kreisfläche  $K$  im Einheitskreise  $E: |z| = 1$  und enthält  $K$  die Punkte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , so enthält  $K$  genau  $m - 1$  Nullstellen von  $r'(z)$ . Die übrigen endlichen Nullstellen von  $r'(z)$  liegen in dem in bezug auf  $E$

inversen Kreise von  $K$ . Enthält das Innere eines Kreisgebietes  $G$ , das von einem orthogonalen Kreise  $\Gamma$  von  $E$  begrenzt wird, keinen Punkt  $\alpha_k$ , so enthält es keine endliche Nullstelle von  $r'(z)$ . Liegt jede Nullstelle von  $r(z)$  auf  $\Gamma$ , so liegt jede endliche Nullstelle von  $r'(z)$  auf  $\Gamma$ . Ist  $P$  das kleinste in bezug auf die orthogonalen Kreise von  $E$  konvexe Kreisbogenpolygon, das die Punkte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  enthält und dessen Seiten auf orthogonalen Kreisen von  $E$  liegen, so enthält  $P$  jede in  $E$  liegende Nullstelle von  $r'(z)$ . Verf. beweist entsprechende Sätze für die rationalen Funktionen  $R(z) = \frac{r(z)}{q(z)}$ , wo  $q(z)$  eine zweite rationale Funktion von der Form wie  $r(z)$  ist. Die erhaltenen Sätze werden auch für konvergente Blaschkesche Produkte

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \frac{z - \alpha_k}{\bar{\alpha}_k z - 1}$$

verallgemeinert. Endlich werden die Resultate auch für die Lage der kritischen Punkte gewisser harmonischen Funktionen angewendet. *Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).*

**Ullrich, Egon: Flächenbau und Wertverteilung.** (*Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.*) 9. Congr. des Math. scand. 179—200 (1939).

Übersichtlicher Bericht über die Hauptergebnisse der Wertverteilungslehre, unter besonderer Berücksichtigung der Deutung der quantitativen Resultate als Aussagen über den Verzweigungscharakter und die Randstellen der zugehörigen Riemannschen Fläche. Eingehend betrachtet Verf. den von ihm angeführten Begriff der Ableitungsfestigkeit, d. h. der Invarianz der Ausnahmewerte und der verschiedenen Arten von Randstellen bei Differentiation. Interessante Beispiele zur Aufklärung dieser Fragen liefern gewisse Transzendenten, die als Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung gewonnen werden. Verf. berichtet insbesondere über gewisse neue Ergebnisse von Möller, die wichtige Beiträge zu dieser Frage enthalten. *Rolf Nevanlinna.*

**Pfluger, A.: Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. I.** *Comment. math. helv.* 11, 180—214 (1938).

Die vorliegende I. Mitteilung zielt darauf, bei vorgegebener Nullstellenverteilung (ganzer Funktionen) für die zugehörigen kanonischen Produkte  $\pi(z)$  nicht bloß den Maximalbetrag  $\log M(r)$  schlechthin, sondern für jedes Argument  $\varphi$  den Strahltypus  $h(\varphi)$  in bezug auf die verschärfte (endliche) Wachstumsordnung  $\varrho(r) \rightarrow \varrho$  zu beherrschen:

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\pi(r e^{i\varphi})|}{r \varrho(r)}.$$

Untersuchungen in umgekehrter Richtung sind schon vor einigen Jahren mehrfach angestellt worden (vgl. dies. Zbl. Valiron: 2, 402; 4, 462; 6, 261; Cartwright: 4, 403; 10, 404; V. Bernstein: 8, 264). Verf. steigt von dem (zuerst von Lindelöf behandelten) Sonderfall, daß alle Nullstellen einem Halbstrahl angehören, zu allgemeineren Typen auf, die im Begriff der meßbaren Nullstellenverteilung gipfeln: eine solche liegt vor, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Strahlen der Richtungen  $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{k+1} = \varphi_1 + 2\pi$  mit  $\varphi_{k+1} - \varphi_k < \varepsilon$  gibt derart, daß die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r; \varphi_k, \varphi_{k+1})}{r \varrho(r)} \quad (n(r; \alpha, \beta) = \text{Nullstellenanzahl im Sektor } |z| \leq r, \alpha \leq \arg z < \beta)$$

existieren. Bildung solcher Grenz- (bzw. Häufungs-) Werte für 0,  $\varphi$  und wachsendes  $\varphi$  führt unter einfachen Festsetzungen zur monoton wachsenden Maßfunktion  $N(\varphi)$  der Nullstellenverteilung. Die Hauptaussage (Satz 3) liefert eine doppelte Darstellung des Strahltypus  $h(\varphi)$ , einmal für festes  $\varphi$  und  $r \rightarrow \infty$  als dominierender Häufungswert (s. u.), zum andernmal durch ein Stieltjesintegral mit der Maßfunktion als Belegung

$$h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\log |\pi(r e^{i\varphi})|}{r \varrho(r)} = \frac{\pi}{\sin \varrho \pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho t - \varrho \varphi) dN(\varphi + t).$$

[ $h$  heißt dominierender Häufungswert von  $u(r)$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$   $|u(r) - h| < \varepsilon$  für alle  $r$  mit Ausnahme einer Menge gilt, deren Länge auf 0,  $r$  im Verhältnis zu  $r$  nach 0 strebt; dieser Begriff erlaubt es besser als  $\lim$ , den geringen Einfluß der Umgebung von Nullstellen zu übersehen; in nullstellenfreien Winkelräumen darf  $\lim$  statt  $\lim^*$  gesetzt werden.] Dieser Satz gilt zunächst für kanonische Produkte (Nullstellenverteilungen) unganzer Ordnungen:  $\varrho(r) \rightarrow \varrho \neq 0, 1, 2, \dots$ ; doch bestehen ähnliche Aussagen für  $\varrho(r) \sim r^n (\log r)^\alpha$  mit  $\alpha \neq -1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Dann ist

$$h(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi \quad \text{mit} \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{\alpha + 1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos}{\sin} n t dN(t). \quad \text{— Verf. bemerkt, daß}$$

zu jeder verschärften Wachstumsordnung  $\varrho(r)$  und jeder vorgeschriebenen, monoton wachsenden Maßfunktion  $N(\varphi)$  Nullstellenverteilungen hergestellt werden können. — Zum Schluß eine Übertragung auf gebrochene Transzendenten, wobei eine offene Frage auftritt: ob es nämlich für deren asymptotisches Verhalten wesentlich darauf ankommt, daß Null- und Polstellenverteilungen einzeln meßbar sind. *Ullrich*.

**Dinghas, Alexander:** Zur Werteverteilung einer Klasse transzendenter Funktionen. *Math. Z.* 45, 507—510 (1939).

Für ganze Funktionen einer Wachstumsordnung  $\omega < \frac{1}{2}$  gilt  $|t(r, w) - n(r, a)| \leq h \cdot L(r) + 2$  für alle  $r$  bis auf eine Intervallmenge  $I$ , deren obere logarithmische Dichte  $\mu_I \leq 2\varrho$  ist. Dabei bezeichnen  $t(r, w)$  den Inhalt des Bildflächenstücks von  $|z| \leq r$  (ausgebreitet über eine Kugel der Oberfläche 1),  $L(r)$  die Länge seines Randes,

$a$  eine beliebige komplexe Zahl;  $\mu_I = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\log r} \int_1^r \varphi(r) d \log r$ , mit  $\varphi(r) = 1$  in  $I$ ,

$= 0$  sonst. Der Beweis folgt unmittelbar aus einem Satz von Beurling und Nevanlinna. *Ullrich* (Gießen).

**Papasiros, Anastassios G.:** Funktionentheoretischer Beweis des Fünfscheibensatzes. *Mitt. math. Semin. Gießen H.* 28, 1—19 (1939) u. Gießen: Diss. 1939.

Die „Scheibensätze“, welche die Aussagen der Picardschen „Punktsätze“ zu Sätzen über den Verzweigungscharakter einer Riemannschen Fläche über vorgegebene Gebiete einer Grundfläche erweitern, sind enthalten in den Ergebnissen der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. Für den einfachsten Fall, den Dreisheibensatz, hatte Ahlfors schon früher einen direkten, elementaren Beweis gegeben [*Acta Soc. Sci. Fennicae* 2 (1933)]. Diese Beweismethode wird vom Verf. angewandt zum Beweis des Fünfscheibensatzes, nach dem eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der Riemannschen Kugel, welche fünf feste Scheiben der Kugel in keinem Blatt schlicht überlagert, zum Grenzkreistypus gehört. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

**Noshiro, Kiyoshi:** Contributions to the theory of meromorphic functions in the unit-circle. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math.* 7, 149—159 (1939).

Dans une première partie, l'auteur définit une classe  $A$  de fonctions méromorphes dans le cercle unité: si  $f(z)$  est de  $A$ , toute transformation conforme du cercle unité sur lui-même donne, à partir de  $f(z)$ , une famille normale (Montel). L'auteur en déduit des limitations diverses pour  $f(z)$ , soit dans le cas général, soit dans le cas d'existence d'une valeur asymptotique sur un chemin tendant vers le cercle unité. — Dans une seconde partie, l'auteur transforme la notion de fonction localement univalente (Montel) dans le cercle unité, en remplaçant le module (euclidien) par le pseudo-module (non-euclidien). Il en déduit diverses limitations d'une telle fonction (Verzerrungssatz et Drehungssatz); il applique aussi au théorème de Bloch. *Milloux*.

**Hällström, Gunnar af:** Über eindeutige analytische Funktionen mit unendlich vielen wesentlichen Singularitäten. (*Helsingfors*, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 277—284 (1939).

Man betrachtet meromorphe Funktionen  $f(z)$  in einem Gebiet  $\Delta$ , dessen Randmenge verschwindende Kapazität hat. Es gibt in  $\Delta$  eine (nicht eindeutig bestimmte)

Potentialfunktion  $g(z)$ , welche in einem Punkte negativ logarithmisch unendlich wird, und bei Annäherung an den Rand gegen  $+\infty$  strebt. Diese Funktion definiert eine Ausschöpfung von  $\Delta$  durch die Gebiete  $g(z) < \lambda$ , welche der Kreisausschöpfung der Ebene entspricht. Die Nevanlinnasche Theorie läßt sich auf diese Funktionen  $f(z)$  übertragen; im zweiten Hauptsatz tritt ein Zusatzglied auf, das von dem wachsenden Zusammenhang der ausschöpfenden Gebiete herrührt. Verf. untersucht in Sonderfällen die Defekte und ihre Abhängigkeit von der gewählten Potentialfunktion  $g(z)$ . Der Fall von isolierten Singularitäten und die Gültigkeit der Defektrelation in diesem Fall wird untersucht.

Ahlfors (Helsingfors.)

**Maitland, B. J.:** A note on functions regular and bounded in the unit circle and small at a set of points near the circumference of the circle. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 382—388 (1939).

In der Sprache der harmonischen Maßtheorie lautet das Ergebnis: Das harmonische Maß einer im Kreisring  $|1 - \delta| < |z| < 1$  gelegenen Punktmenge  $E$  in bezug auf den Einheitskreis und gemessen in einem beliebigen Punkte  $z = re^{i\varphi}$  des Einheitskreises, ist größer als  $K(1 - \delta)(1 - r)^{\frac{m}{2\pi}}$ ; hier bedeutet  $m$  das Maß der Projektion von  $E$  vom Ursprung aus auf  $|z| = 1$ , und  $K$  eine numerische Konstante  $K \geq \frac{1}{30}$ . (Vgl. T. Hall, dies. Zbl. 16, 216.)

Ullrich (Gießen).

**Wolf, František:** An extension of the Phragmén-Lindelöf theorem. J. London Math. Soc. 14, 208—216 (1939).

Der Phragmén-Lindelöfsche Satz in der klassischen Fassung für die obere Halbebene  $\S$  erschließt  $|f(z)| \leq 1$  in  $\S$  aus den Annahmen:  $f(z)$  sei regulär in  $\S$ , habe bei Annäherung an die reelle Achse Häufungswerte  $\leq 1$  (dem Betrage nach) und erfülle für jedes  $\varepsilon > 0$  die Schätzung  $|f(re^{i\vartheta})| \leq e^{\varepsilon r}$  für alle  $r > R_\varepsilon$ . Die Verschärfung setzt an dieser 3. Voraussetzung an, indem eine Winkelabhängigkeit der Schranke rechts zugelassen wird, die jetzt  $e^{\varepsilon r \psi(\vartheta)}$  heiße und wo für  $\psi(\vartheta)$  nur die  $L$ -Integrabilität gefordert wird. — Der Beweis ruht auf der Jensen-Névanlinnaschen Formel, muß aber in stärkerem Umfang typische Abschätzungsverfahren der reellen Funktionentheorie einbeziehen.

Ullrich (Gießen).

**Kunugui, Kinjiro:** Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 27—32 (1939).

Der Satz betrifft die Eindeutigkeit von Grenzübergängen. Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \lim_{z \rightarrow \zeta' \neq \zeta} |f(z)|,$$

wenn  $f(z)$  in einem Gebiet  $\mathfrak{G}$  regulär und beschränkt bleibt, für welches  $z$  innere,  $\zeta'$  und  $\zeta$  (nicht isolierte, erreichbare) Randpunkte bezeichnen; die Aussage ist früher unter Zusatzvoraussetzungen bekannt gewesen (z. B. Jordanrand,  $\zeta$  regulärer Punkt in bezug auf das Dirichletsche Problem u. a. m.; vgl. Seidel, dies. Zbl. 3, 403; Beurling, Diss. S. 101, dies. Zbl. 8, 318).

Ullrich (Gießen).

**Leja, François:** Sur certaines fonctions rationnelles extrémales. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 639—641 (1938).

Etant donné un ensemble fermé et borné  $E$  de points du plan et un polynome  $p(z)$  ne s'annulant pas dans  $E$  l'auteur construit, quel que soit  $n = 1, 2, \dots$ , un système de  $n + 1$  points de  $E$ :  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$  tels que les fonctions rationnelles

$$R_n(z) = \frac{z - \eta_1}{\eta_0 - \eta_1} \dots \frac{z - \eta_n}{\eta_0 - \eta_n} \cdot \left[ \frac{p(\eta_0)}{p(z)} \right]^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jouissent de plusieurs propriétés remarquables. En particulier, la suite  $\left\{ \frac{1}{n} \log |R_n(z)| \right\}$  converge en tout point du plan n'appartenant pas à  $E$  vers une fonction harmonique  $G(z)$ . Dans le cas, où le polynome  $p(z)$  est du degré 1, la fonction  $G(z)$  se réduit à la fonction de Green du domaine  $D_0$  extérieur à  $E$  dont la frontière est contenue dans  $E$  et qui contient le point zéro du polynome  $p(z)$ . Ce point est le pôle de  $G(z)$ . Autoreferat.